

DOI:10.12405/j.issn.2097-1486.2024.03.003

精确量子多体疤痕态的几个代数框架

么志远

量子理论及应用基础教育部重点实验室,兰州理论物理中心,甘肃省理论物理重点实验室,兰州大学,甘肃 兰州 730000

摘要:多体系统涌现出来的统计力学规律是联系微观相互作用和宏观行为的桥梁,也是定量研究平衡态宏观物理量的基础。尽管现代遍历理论显著加深了我们对经典统计力学基础的理解,但本征态热化假说(eigenstate thermalization hypothesis, ETH)能够在更为基础的量子层面为统计物理奠定更坚实的基础。近年来,人工量子系统方面的快速发展引发了人们对孤立量子多体系统的平衡态性质及热化动力学的大量研究。强意义下的本征态热化假说,即一般相互作用系统中的每个有限能量密度的本征态都会热化,也经受住了这些考验。然而,最近里德堡原子链的实验研究却揭示了弱违背本征态热化假说系统的存在:在该系统中ETH对一组测度为零的特殊本征态,量子多体疤痕态,失效。本文先从个人视角对量子多体疤痕态研究中建立的几个有代表性的代数框架做一简要综述,之后介绍我们最近发展的、能把之前多个代数框架统一起来的关联矩阵框架。

关键词:本征态热化假说;量子多体疤痕态;对称和准对称; η -配对;关联矩阵

中图分类号:O413

文献标志码:A

文章编号:2097-1486(2024)03-0244-22

Several mathematical frameworks of exact quantum many-body scars

YAO Zhiyuan

Key Laboratory of Quantum Theory and Applications of MOE, Lanzhou Center for Theoretical Physics, Key Laboratory of Theoretical Physics of Gansu Province, Lanzhou University, Lanzhou 730000, China

Abstract: The statistical laws of many-body systems is a bridge between microscopic interactions and macroscopic behaviors, and it is also the basis of predicting equilibrium macroscopic properties in a quantitative way. While modern ergodic theory has significantly deepened our understanding of the foundations of classical statistical mechanics, the eigenstate thermalization hypothesis (ETH) can put quantum statistical physics on a more solid foundation. In recent years, the rapid development in manipulating artificial quantum systems has spurred research in equilibrium properties as well as in the thermalization dynamics of isolated quantum systems. The strong ETH, which posits that in a generic interacting many-body system, the eigenstate of every finite energy density thermalizes, has withstood these tests. However, a recent experimental study in a Rydberg atom chain has revealed the existence of a weak ergodicity-breaking system, where ETH fails in a measure-zero set of special eigenstates-quantum many-body scars (QMBS). This article gives a brief review of several paradigmatic mathematical formalisms of QMBS. It then introduces the correlation matrix framework of QMBS that unifies many previous mathematical formalisms.

Key words: eigenstate thermalization hypothesis; quantum many-body scars; symmetry and quasisymmetry; η -pairing; correlation matrix

0 引言

0.1 热化现象和统计力学基础

爱因斯坦对认知自然的这句名言“这个世界最不可理解的就是它是完全可以理解的(The most incomprehensible thing about the world is that it is at all comprehensible)”放到对宏观系统的描述上再合适不过了。无论在经典还是量子层面,用微观自由度去描述理解宏观物体是不切实际的。而且由于混沌现象,即便在经典物理层面我们对一般三体问题的预测也不可行^[1-3]。不过随着体系粒子数(复杂度)的增加,系统涌现出的层列结构(hierarchical structure)和新的统计规律使得我们理解和准确预言宏观物理量变为可能^[4-6]。一方面,对于宏观物体的描述我们关心不再是数量众多的微观自由度而是少数的宏观物理量。比如研究流体的运动时,我们仅需要考虑流体局域的密度、速度、温度之类的物理量,而不需要考虑微观分子的位置和速度。一个很好的类比是两个随机变量 x 和 y 的概率密度函数 $f(x, y)$:我们只关心联合概率分布 $p(x+y)$ 而不是 $f(x, y)$ ^[7-8]。同时,物质世界的层列结构意味着对于不同尺度的物理之间的影响通常十分有限,而且每个尺度会涌现出新的规律^[5,9]。比如虽然组成流体的原子、分子的微观结构和微观相互作用形式千差万别,但是在宏观尺度上我们可以统一地用Navier-Stokes方程来描述流体的运动。由此讨论可以看出我们对流体一般性质的描述不需要等到20世纪量子力学的建立、不需要等到未来大统一理论的建立。另一方面,我们对周围所处的世界能有一个很好的认识和普适的热化(thermalization)现象息息相关。热化现象说的是宏观孤立体系从一般的初态出发,经过有限的热化时间(thermalization time)之后,会进入一个和初态细节无关的热力学平衡态。这时,我们关心的热力学物理量的均值和涨落被发现都能被统计力学的吉布斯系综预言^[10]。

统计力学在研究多粒子体系平衡态的性质方面取得了巨大成功,实验结果总是和系综理论预言高度吻合。统计力学的发展却像一个倒金字塔:从统计力学基本的假设出发,我们推演出了一些计算规则,而后在广阔领域的研究中百试不爽^[11]。比如我们热力学平衡态的吉布斯系综描述需要假设热力学平衡态的存在和子系统的统计独立^[12]。不过大多数情况下,统计力学的基本假设没法从微观动力学

的角度严格推演出来。随着研究的深入,我们可能会碰到这些假设不成立的情况。所以从微观动力学的角度去解释统计力学的基础,并认识其可能存在的局限是非常必要的。比如,经典统计物理中一个重要的假设是遍历性假设(ergodic hypothesis):系统在相空间的遍历性使得物理量 O 的系综平均 $\bar{O}$ 和物理量它的长时间平均相等,

$$\bar{O} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T O(t) dt. \quad (1)$$

不过值得注意的是,长时间平均才和系综平均相等仅仅是弱意义下的热化(thermalization in the weak sense)。我们通常观察到的热化现象满足强意义下的热化(thermalization in the strong sense):系统经过有限时间进入平衡态附近后,物理量在平衡值附近做小幅涨落、任意时刻的算符期望值趋于系综计算结果^[13]。此外,遍历性假设通常很难证明,成立的情况也需要对动力学性质做苛刻的要求^[14-15]。还有一点,遍历性假设也不能解释系统存在有限的弛豫时间和趋近平衡态的过程,除非我们引入比遍历性更强的混合(mixing)的概念^[16]。尽管如此,由于遍历性假设在构建统计力学基础过程中的历史重要性,我们把不满足强意义下热化的现象(absence of thermalization),无论是经典还是量子层面,统称为遍历性破缺(ergodicity breaking)。

近年来,随着人工量子系统调控水平的显著提高、调控手段的日益丰富,孤立量子系统的非平衡态动力学在实验上已经可以很深入地研究,这方面的研究也是现在国际上的一个主流研究方面和热点。鉴于量子力学是比牛顿力学更为基础的理论,从量子物理的层面理解热化现象和统计力学的系综描述已经变得非常紧迫了。类似于统计物理中的遍历性假设,量子统计物理基础中有一个广为接受的框架:本征态热化假说(ETH)^[17-21]。本征态热化假说指出局域观测量 $\hat{O}$ 在远离基态和最高能量态的有限能量密度(基态能量设为零)的本征态 $|m\rangle$ 和 $|n\rangle$ 下的矩阵元取如下形式^[13],

$$\langle m | \hat{O} | n \rangle = \delta_{mn} O(E_n) + e^{-\frac{S(\bar{E})}{2}} f_O(\bar{E}, \omega) R_{mn}, \quad (2)$$

其中 $\bar{E} = (E_n + E_m)/2$ 是平均能量, $\omega = E_n - E_m$ 是能级间的能量差(我们选取单位 $\hbar = 1$), $S(\bar{E})$ 是体系能量为 $\bar{E}$ 时的热力学熵, $O(E)$ 和 $f_O(E, \omega)$ 都是关于参数的光滑函数, $R_{mn} = \mathcal{O}(1)$ 是一个看起来随机的数。如果我们计算某个局域观测量 $\hat{O}$ 在本征态

$|n\rangle$ 下面的期望值 $\langle \hat{O} \rangle_n \equiv \langle n | \hat{O} | n \rangle$, 那么按照本征态热化假说(2)式, 能量相近的两个本征态对应算符期望值 $\langle \hat{O} \rangle$ 也应该接近。如果把 $\langle \hat{O} \rangle_n$ 按照能量 E_n 的值画出来, 那么这些数据点应该在一个带当中, 如图1所示。随着系统尺寸增大, 有限尺寸效应带来的带宽应该变窄, 并在热力学极限下变成一条曲线。

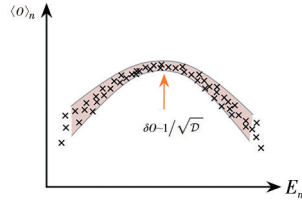


图1 局域观测量在本征态下的期望值随本征能量变化的示意图

在带的中心附近, 由于能量 E 对应的有效温度 [可以 $E = \text{Tr}(e^{-\beta H}) / \text{Tr} e^{-\beta H}$ 定出] 趋于无穷大, $e^{S(E)}$ 和系统的希尔伯特空间维度 $\mathcal{D}$ (微观状态数) 是一个量级, 所以此处 $\langle \hat{O} \rangle$ 的展宽满足如下标度行为 $\delta O \sim 1/\sqrt{D}$ 。那么按照 ETH, 在热力学极限下这个带应该趋于系综理论预言的一条光滑曲线。

Figure 1 A schematic plot of the expectation value $\langle \hat{O} \rangle_n$ of a local observable $\hat{O}$ with respect to the eigenstate $|\psi_n\rangle$ against the eigenenergy E_n

At the center of the band, the effective temperature approaches infinity, which can be deduced from the condition $E = \text{Tr}(e^{-\beta H}) / \text{Tr} e^{-\beta H}$. And the bandwidth of $\langle \hat{O} \rangle$ here scales with the dimension of the Hilbert space $\mathcal{D}$ as $\delta O \sim 1/\sqrt{D}$. According to the ETH, this band should approach a smooth line in the thermodynamic limit.

相比于经典统计物理中的遍历性假设, 本征态热化假说为孤立量子系统的热化现象提供了一个更为坚实的基础: 它不仅能够解释平衡态下局域物理量的吉布斯系综描述, 还能解释体系趋向平衡态的过程, 如图2(a)所示^[13,19]。除了有着大量局域守恒量的可积系统^[22-24]和准局域运动积分的多体局域化体系^[25-28], 大量的实验和理论计算均支持本征态热化假说^[13]。一些模型中的计算更是发现系统满足强意义下的本征态热化假说(ETH in the strong sense): 每个有限能量本征态都满足 ETH^[29]。而且和无序系统中由于能量共振一般情况不存在孤立的局域态的道理类似^[30], 弱意义下的本征态热化假说, 也就是说存在测度为零的少部分不满足 ETH 的本征态, 看起来是非常不可能的。

0.2 量子多体疤痕态的发现

看起来除了可积系统与强无序的多体局域化系

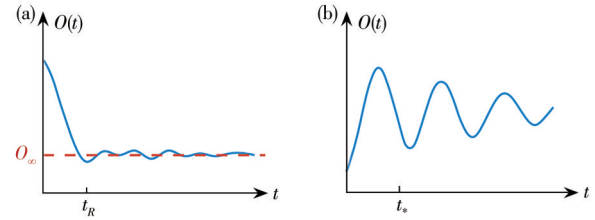


图2 (a) 孤立量子系统中的热化现象: 从一个一般初态 $|\psi(t=0)\rangle$ 出发, 局域观测量 $\hat{O}$ 的期望值 $O(t) \equiv \langle \psi(t) | \hat{O} | \psi \rangle$ 经过一个有限的迟豫时间 t_R 后, 会在一个平衡值 O_∞ 附近做小幅震荡, 而且 O_∞ 和能量等于初态能量期望值的系综理论计算得到的结果吻合。通常情况下, 当我们考虑的局域观测量不对应全局守恒量时, 迟豫时间 t_R 和体系特征能量给出的时间 t_* 在一个量级, $t_* \sim t_R$; (b) 处于里德堡阻塞(Rydberg blockade)区域的一维里德堡原子阵列中的不热化现象的示意图。实验当中观测到一个局域观测量 $\hat{O}$, 在经过特征时间 t_* 后依然呈现出长时间的反常振荡, 这意味着体系存在不热化现象。

Figure 2 (a) An illustration of thermalization in a generic isolated interacting quantum many-body system. If we prepare an isolated system in a generic state $|\psi(t=0)\rangle$ and let it evolve under its Hamiltonian, the expectation value of a local observable $\hat{O}$, $O(t) \equiv \langle \psi(t) | \hat{O} | \psi \rangle$ will undergo small fluctuation around an equilibrium value O_∞ after a finite relaxation time t_R . Moreover, O_∞ equals the ensemble-averaged value, with energy set by the initial state $|\psi(t=0)\rangle$. When O corresponds to the density of a global conserved quantity, the relaxation time is typically on the same order as the timescale t_* set by the characteristic energy scale, $t_R \sim t_*$; (b) A schematic plot of the absence of thermalization in a Rydberg atom chain in the Rydberg blockade regime. In experiments, a certain local observable $\hat{O}$ undergoes long-time anomalous coherent oscillation even after the characteristic time scale t_* , indicating a failure to thermalize.

统, 一般的相互作用系统应该都会热化而且应该热化、并满足强意义下的本征态热化假说。不过2017年哈佛大学的 M. Lukin 组在既不可积也不存在无序的一维里德堡原子阵列系统中却观察到了不热化现象^[31]。如图3所示, 实验中首先通过光镊把 ^{87}Rb 原子排成一个一维阵列, 然后再沿着原子阵列方向打两束激光以把原子的基态耦合到高激发的里德堡态。由于里德堡原子的电偶极矩很大, 它们之间的相互作用必须考虑进来。考虑到每个原子只能处于基态或者里德堡激发态, 我们可以用自旋 1/2 来描述每个原子的状态, 并选取自旋朝下代表基态 $|\downarrow\rangle$,

自旋朝上代表里德堡激发态 $|\bullet\rangle$ 。那么系统的哈密顿量可以写成如下形式:

$$\hat{H} = \frac{\Omega}{2} \sum_i \hat{\sigma}_i^x - \Delta \sum_i \hat{n}_i + \sum_{i < j} V_{ij} \hat{n}_i \hat{n}_j, \quad (3)$$

其中 $\hat{\sigma}_i^x = |\bullet\rangle\langle\bullet|_i + |\circ\rangle\langle\circ|_i$ 为格点 i 上的能级翻转算符, Ω 为拉比频率(Rabi frequency), $\hat{n}_i = |\bullet\rangle\langle\bullet|_i$ 为格点 i 上的里德堡态的粒子数算符, Δ 为激光的失谐, V_{ij} 为格点 i 和格点 j 上原子的电偶极矩诱导的范德瓦耳斯相互作用强度。当失谐 Δ 可以忽略、系统处于里德堡阻塞区域 $V_{i,i+1} \gg \Omega \gg V_{i,i+2}$ 时,实验发现从Neél态 $|\bullet\circ\bullet\circ\bullet\circ\bullet\circ\rangle$ 出发做么正含时演化时,某些局域观测量发生了反常的、长时间的振荡,如图2(b)所示,暗示了系统存在不热化的行为。

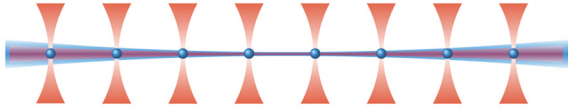


图3 一维里德堡原子阵列系统

为了把处于基态 $|g\rangle = |5S_{1/2}, F=2, m_F=-2\rangle$ 的 ^{87}Rb 原子激发到里德堡态 $|r\rangle = |70S_{1/2}, m_J=-1/2\rangle$,我们需要打两束激光,图中用蓝色(420 nm)和红色(1013 nm)线代表。因为激光总体上只耦合基态 $|\circ\rangle$ 和里德堡激发态 $|\bullet\rangle$,每个原子的自由度可以用自旋1/2描述。

Figure 3 A one-dimensional Rydberg atom chain

To couple the ground state $|g\rangle = |5S_{1/2}, F=2, m_F=-2\rangle$ of ^{87}Rb atom with the Rydberg state $|r\rangle = |70S_{1/2}, m_J=-1/2\rangle$, two lasers of wavelengths 420 nm (blue) and 1013 nm (red) are needed. Since the two lasers only couple ground state $|\circ\rangle$ to the Rydberg state $|\bullet\rangle$, the system can be described as a spin-1/2 model.

在里德堡阻塞区域,相邻的原子不能同时处于里德堡激发态,那么当失谐为零时,系统的零阶有效哈密顿量取如下形式^[32-33]:

$$\hat{H}_{\text{eff}} = \sum_i \hat{P}_{i-1} \hat{\sigma}_i^x \hat{P}_{i+1}, \quad (4)$$

其中 $\hat{P}_i = 1 - \hat{n}_i = |\circ\rangle\langle\circ|_i$ 为格点 i 上的基态投影算符。鉴于其形式,这个有效模型被称为PXP模型。考虑周期性边界条件,对这个哈密顿量进行对角化并计算其局域观测量 $\hat{\sigma}_i^z = 2\hat{n}_i - 1$,会发现这个局域观测量在本征态下的期望值随着本征能量的行为与图1中ETH预言的局域观测量的行为存在不一致的地方。尽管大部分数据点落在一个带中,但存在一系列特殊的本征态(在图4中用蓝颜色圈标记的点),其对应的观测量平均值严重偏离了这个带。更进一步的计算表明,这些特殊的态和初态 $|Z_2\rangle = |\bullet\circ\bullet\circ\bullet\circ\bullet\circ\rangle$

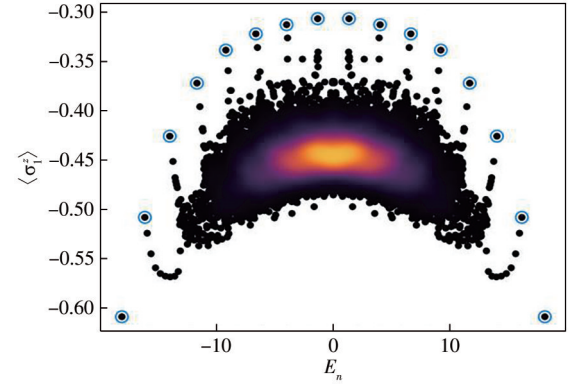


图4 PXP模型中单格点的 $\hat{\sigma}_i^z$ (由于平移对称性我们取 $i=1$)在本征态下的期望值随本征能量变化的数据图

计算对应的系统尺寸 $L=30$,并选取了格点动量 $k=0$ 、宇称量子数 $I=1$ 的对称区间。图中颜色的亮度代表附近数据点的密度。

Figure 4 A plot of the eigenstate expectation value of $\langle\sigma_i^z\rangle = \langle\psi_n|\hat{\sigma}_i^z|\psi_n\rangle$ against the eigenenergy E_n of the PXP model. The computation is performed for a system size $L=30$ in the $(k, I)=(0, 1)$ symmetry sector where k is the lattice momentum and I is the parity quantum number. The brightness of the data points in the bulk represents the density of data points.

有很大的交叠,如图5(a)所示。而且,如图5(b)所示,这些特殊态的二分冯诺依曼纠缠熵(bipartite von Neumann entanglement entropy),和相近能量的本征态相比,也显著偏低。这更进一步说明了这组特殊本征态在自旋基矢上的权重显著偏大,不同于随机矩阵理论预言的系统本征态在局域基矢上的权重是服从高斯分布^[13]。类比于单粒子问题中的量子疤痕态在周期轨道附近的概率密度显著大于其他地方(看起来像一条伤疤,这就是疤痕态名字的由来)^[34-35],这组特殊的、违背ETH的本征态被称之为量子多体疤痕态(quantum many-body scars, QMBS)^[32-33]。为了叙述,我们以下简称为疤痕态。回到实验,因为初态 $|Z_2\rangle$ 在疤痕态上的权重比较大,而且相邻疤痕态之间的能量间距 ΔE 近似相等,所以系统的含时演化可以粗糙地近似为这组态下的演化,进而呈现出如图2(b)所示的长时间的周期振荡^[33]。由于PXP模型中量子多体疤痕态的数目与系统希尔伯特空间维度相比在热力学极限下趋于零,所以只有当初态和疤痕态有显著交叠时系统才会体现出不热化现象。这种由于存在测度为零的疤痕态、只满足弱意义下的本征态热化假说的体系中的不热化现象称之为弱遍历性破缺(weak ergodicity breaking)。

量子多体疤痕态的发现是出乎意料的,它跳出

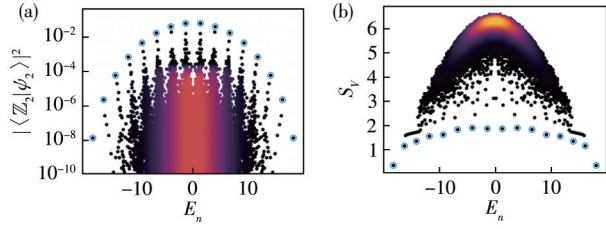


图 5 (a) PXP 模型中本征态 $|\psi_n\rangle$ 在 $|\mathbb{Z}_2\rangle$ 态上的概率幅 $|\langle \mathbb{Z}_2 | \psi_n \rangle|^2$; (b) 子系统取一半时对应的冯诺依曼纠缠熵 S_v 。数据点的亮度代表周围数据点的密度,量子多体疤痕态用蓝色圈出的点标记。和图 4 一样,计算对应的参数为 $(L, k, I) = (30, 0, 1)$ 。

Figure 5 (a) The probability overlaps of eigenstate $|\psi_n\rangle$ in the PXP model with the $|\mathbb{Z}_2\rangle$ state, $|\langle \mathbb{Z}_2 | \psi_n \rangle|^2$; (b) The bipartite von Neumann entanglement entropy S_v of the eigenstates. Both plots are plotted against the eigenenergy E_n . The brightness of the color represents the local density of data points, and quantum many-body scars are circled in blue. Same as Fig. 4, the computation uses parameters $(L, k, I) = (30, 0, 1)$.

了我们对一般相互作用多体系统本征态认识的框架,迅速受到广泛关注、并成为一个国际前沿热点研究方向。理论研究又在—维 AKLT 模型、自旋为 1 的 XY 模型和推广的 Hubbard 模型等熟悉的凝聚态模型中发现了疤痕态,并且写下了其中疤痕态的解析表达式^[36-40]。在具体模型构造疤痕态的模型的同时,从投影算符、对称性、谱生成代数(spectrum generating algebras, SGA)等原理出发系统构造、理解不同模型中量子多体疤痕态的数学框架也陆续被建立^[37, 41-49]。本文中我们把上述具体模型中有解析表达式和不同数学框架中构造的疤痕态称之为精确量子多体疤痕态(exact QMBS)。与之形成对比的是 PXP 模型中的疤痕态:除了能谱中间少数的几个疤痕态^[50-51], PXP 模型中的绝大部分疤痕态尚不能写解析表达式,其物理起源存在多种不同的理解^[52-59]。为了方便叙述,我们把这些尚不能包含在精确量子多体疤痕态定义中的疤痕态姑且称之为近似量子多体疤痕态(approximate QMBS)。在量子多体疤痕态的大量理论研究成果涌现的同时,实验上也陆续在不同平台中找到了疤痕态体系^[60-62],现在也已经有好几篇量子多体疤痕态的综述文章了^[63-66]。考虑到潘磊在《新兴科学技术趋势》发表的一篇综述文章从经典量子对应和复合自旋的准粒子等角度对 PXP 模型中的疤痕态做了详细的介绍^[67],本文将聚

焦在精确量子多体疤痕态上面。我们将对量子多体疤痕态的几个代数框架做一个相对自洽的介绍,以期能提供一些和原始文献不尽相同、容易理解的新视角。

1 量子多体疤痕态的几个代数框架

正如涌现、对称性破缺、广义刚度(generalized rigidity/elasticity)等概念的引入为我们系统理解多体系统的相、相变和低能激发提供了一个很好的框架并确立了凝聚态物理作为一个学科的地位^[5, 68-69],建立对尽量多的模型中的量子多体疤痕态的框架性理解是至关重要的。限于知识面和篇幅,我们将在本节中列举几个作者比较熟悉的代数框架以期能更好地理解疤痕态和构造新的有疤痕态的哈密顿量。

1.1 Shiraishi-Mori 构造

因为量子多体疤痕态是本征态,我们可以把体系的希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 分解为疤痕态空间 $\mathcal{S}$ 和其余不违背 ETH 的空间 $\mathcal{R}$ 的直和 $\mathcal{H} = \mathcal{S} \oplus \mathcal{R}$ 。考虑到 ETH 要求能量相近的两个本征态对应的局域观测量 $\hat{O}$ 的期望值接近,这意味着如果 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{R}$ 对应的“有效”哈密顿量的形式(矩阵元的行为)不一样,那么如图 6 所示,很自然地 $\mathcal{S}$ 空间中的本征态和 $\mathcal{R}$ 中能量相近的本征态局域算符期望值的 $\langle \hat{O} \rangle_n$ 会有较大不同。

下面我们形式化地去构造这样的局域哈密顿量 $\hat{H}$,使得联系 $\mathcal{S}$ 中哈密顿量的有效形式为 $\hat{H}_s \neq \hat{H}$ 。首先我们把 $\hat{H}$ 写为

$$\hat{H} = \hat{H}_s + \hat{H}_1, \quad (5)$$

图 6 中矩阵元块对角的分解的充要条件是

$$\hat{H}\mathcal{S} = \hat{H}_s\mathcal{S} \subset \mathcal{S}. \quad (6)$$

相应的对于任意 $|\psi_s\rangle \in \mathcal{S}$, 我们便有

$$\hat{H}_1|\psi_s\rangle = 0, \quad \hat{H}_s|\psi_s\rangle \in \mathcal{S}. \quad (7)$$

所以如果 $\hat{H}_1$ 的零空间 $\text{Ker}(\hat{H}_1)$ 是 $\hat{H}_s$ 的不变子空间,那么我们就选取 $\text{Ker}(\hat{H}_1)$ 作为疤痕态空间 $\mathcal{S}$ 。为了构造更具体的 $\hat{H}_s$ 和 $\hat{H}_1$ 的形式,我们考虑 $\mathcal{S}$ 为一系列线性独立的局域投影算符 $\{\hat{P}_i\}$ 的零空间的情况

$$\mathcal{S} = \left\{ |\psi_s\rangle \mid \hat{P}_i |\psi_s\rangle = 0, \forall i \right\}. \quad (8)$$

显然如下形式的 $\hat{H}_1$,

$$\hat{H}_1 = \sum_{ij} \hat{P}_i \hat{h}_{ij} \hat{P}_j, \quad \text{其中 } \hat{h}_{ij}^\dagger = \hat{h}_{ji}, \quad (9)$$

满足 $\hat{H}_1|\psi_s\rangle=0$ 的要求。满足 $\hat{H}_1$ 的零空间是 $\hat{H}_s$ 不变子空间的 $\hat{H}_s$ 的形式由如下定理给出。

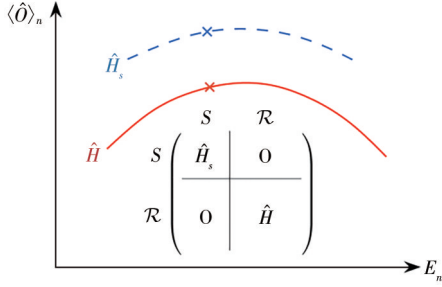


图6 Shiraishi-Mori构造违背本征态热化假说的示意图
方便起见且不失一般性,我们考虑没有额外对称性的情况。系统的希尔伯特空间总可以写成两组本征态张成的空间的直和 $\mathcal{H} = \mathcal{S} \oplus \mathcal{R}$ 。假设 $\mathcal{R}$ 空间中的本征态满足ETH,那么 $\langle \hat{O} \rangle_n$ 和 E_n 的依赖关系将是一条光滑的曲线(红色实线)。如果哈密顿量矩阵元在测度为零的 $\mathcal{S}$ 空间中可以由另外一个局域哈密顿量 $\hat{H}_s \neq \hat{H}$ 重构出来,一般而言 $\langle \hat{O} \rangle_n$ 和 E_n 的依赖关系将是另外一条不同的曲线(蓝色虚线)。那么 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{R}$ 中能量相近的两个本征态(用蓝色和红色小叉表示)对应的 $\langle \hat{O} \rangle_n$ 不一样,这将导致系统违背ETH。

Figure 6 An illustration of the violation of ETH in the Shiraishi-Mori construction

For simplicity and without loss of generality, we consider the case where the system is devoid of usual on-site symmetries. The Hilbert space can always be written as a direct sum of subspaces spanned by two groups of eigenstates $\mathcal{H} = \mathcal{S} \oplus \mathcal{R}$. We assume the eigenstates in $\mathcal{R}$ obey the ETH so that the corresponding $\langle \hat{O} \rangle_n$ as a function of the eigenenergy E_n will be a smooth line (blue solid line). If the Hamiltonian matrix element in a measure-zero subspace $\mathcal{S}$ can be reconstructed from a local Hamiltonian $\hat{H}_s \neq \hat{H}$, in general, $\langle \hat{O} \rangle_n$ as a function of E_n will be a different line (red dashed line). It becomes clear that two eigenstates close to eigenenergy in $\mathcal{S}$ and $\mathcal{R}$, denoted as blue and red crosses, can have disparate values of $\langle \hat{O} \rangle_n$, resulting a violation of the ETH.

定理1 (不变子空间定理)。考虑一个哈密顿量 $\hat{H}$ 和系统希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 的一个直和分解 $\mathcal{H} = \mathcal{S} \oplus \mathcal{R}$, 其中子空间 $\mathcal{S}$ 是一组投影算符 $\{\hat{P}_i\}$ 所定义的零空间,那么子空间 $\mathcal{S}$ 是 $\hat{H}_s$ 不变子空间,

$$\hat{H}_s|\psi_s\rangle \in \mathcal{S}, \quad \forall |\psi_s\rangle \in \mathcal{S}, \quad (10)$$

的充要条件为

$$[\hat{P}_i, \hat{H}_s] = \sum_{jk} \hat{P}_j \hat{O}_i \hat{P}_k, \quad \forall i, \quad (11)$$

其中 $\hat{O}_i$ 为任意算符。

证明 定理的充分性容易证明:让(11)式两边作用于 $\mathcal{S}$ 中的任意态 $|\psi_s\rangle$,对任意 $\hat{P}_i$ 我们会发现

$$\hat{P}_i(\hat{H}_s|\psi_s\rangle) = 0, \quad (12)$$

所以 $\mathcal{H}_s|\psi_s\rangle \in \mathcal{S}$ 。反之如果 $\mathcal{S}$ 是 $\hat{H}_s$ 的不变子空间,那么对于任意 $|\psi_s\rangle \in \mathcal{S}$ 和 $\hat{P}_i$,我们有

$$\hat{P}_i \hat{H}_s |\psi_s\rangle = 0, \quad (13)$$

考虑到 $\hat{P}_i|\psi_s\rangle = 0$,所以从上式我们有

$$[\hat{P}_i, \hat{H}_s]|\psi_s\rangle = 0, \quad (14)$$

考虑到 $i[\hat{P}_i, \hat{H}_s]$ 是厄米算符,上述条件告诉我们 $[\hat{P}_i, \hat{H}_s]$ 谱分解可以写成如下形式

$$[\hat{P}_i, \hat{H}_s] = \sum_{jk} c_{jk}^{(i)} |\phi_r^j\rangle \langle \phi_r^k|, \quad (15)$$

其中 $\{|\phi_r^j\rangle\}$ 是 $\mathcal{R}$ 中的一组正交完备基。定义了算符 $\hat{O}_i$ 使得 $c_{jk}^{(i)} = \langle \phi_r^j | \hat{O}_i | \phi_r^k \rangle$ 和投影算符

$$\hat{P}_j = |\phi_r^j\rangle \langle \phi_r^j|$$

$$[\hat{P}_i, \hat{H}_s] = \langle \phi_r^j | \hat{O}_i | \phi_r^k \rangle |\phi_r^j\rangle \langle \phi_r^k| = \sum_{jk} \hat{P}_j \hat{O}_i \hat{P}_k. \quad (16)$$

那么定理的必要性的也得到证明。

取 $\hat{h}_{ij} = \delta_{ij} \hat{h}_i$ 并且 $[\hat{P}_i, \hat{H}_s] = 0$ 的特殊情况,体系的哈密顿量为

$$\hat{H} = \hat{H}_s + \sum_i \hat{P}_i \hat{h}_i \hat{P}_i. \quad (17)$$

那么一般情况下, $\mathcal{S}$ 空间的 本征态将是系统的疤痕态,这个构造就是 Shiraishi-Mori 构造^[41]。考虑一个一维自旋 1/2 格点数 L 为偶数的周期性边界条件的格点自旋系统,相邻三个格点的总自旋 $\hat{J}_i \equiv \hat{S}_{i-1} + \hat{S}_i + \hat{S}_{i+1}$ 的自旋为 1/2 或者 3/2。我们可以用 $\hat{J}_i$ 构造总自旋 3/2 的投影算符

$$\hat{P}_i = \frac{1}{3} \left[\hat{J}_i \cdot \hat{J}_i - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) \right] = \frac{2}{3} (\hat{S}_{i-1} \cdot \hat{S}_i + \hat{S}_i \cdot \hat{S}_{i+1} + \hat{S}_{i+1} \cdot \hat{S}_{i-1}) + \frac{1}{2}. \quad (18)$$

那么 $\{\hat{P}_i\}$ 决定的零空间 $\mathcal{S}$ 由 Majumdar-Ghosh 模型的二重简并的基态空间给出,如图 7 所示。如果取 $\hat{H}_s = 0$,那么疤痕态对应的本征能量就为零。

1.2 对称性方法

对称性及其破缺贯穿着现代物理的发展,也经常是我们思考问题的一个出发点。在量子力学发展的早期阶段,系统的能级简并一直是个谜,直到 E. Wigner 把对称性引入量子力学才揭示了对称性会导致能级简并^[70]。在量子多体疤痕态的研究当中,

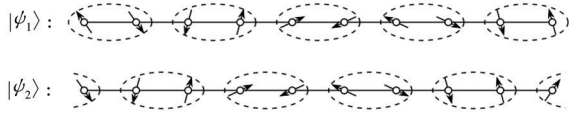


图7 Majumdar-Ghosh模型的两个简并基态示意图

Majumdar-Ghosh模型的两个简并基态 $|\psi_1\rangle$ 和 $|\psi_2\rangle$,图中虚线椭圆中的两个自旋处于自旋单态 $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$ 。

Figure 7 Schematic plot of two degenerate ground states in the Majumdar-Ghosh model

A schematic plot of the two ground states of the Majumdar-Ghosh model, $|\psi_1\rangle$ and $|\psi_2\rangle$. The two spins in each dashed oval form a singlet state, $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$.

我们经常会碰到疤痕态空间 $\mathcal{S}$ 是某个哈密顿量本征能量为 E 的简并子空间 ϕ_E 的情况,对称性分析往往会变得十分有用。这一小节中我们将介绍三个利用对称性构造疤痕态模型的三个代数框架。

1.2.1 群的不变子空间方法

和之前一样,我们把哈密顿量 $\hat{H}$ 写作两部分 $\hat{H}_s$ 和 $\hat{H}_1$,并且让 $\hat{H}_1$ 湮灭疤痕态张成的空间 $\mathcal{S}$ 。不过群不变子空间的方法中构造 $\hat{H}_1$ 是借助李群的生成元而不是投影算符^[43-45]。考虑一个 N -维李群 $\mathcal{G}$,其厄米生成元记为 $\hat{T}_a$,其中 $a=1, 2, \dots, N$ 。如果疤痕态空间构成群 G 的单重态表示(singlet representation)空间,也就是说

$$\hat{T}_a|\psi_s\rangle=0, \quad \forall a, |\psi_s\rangle \in \mathcal{S}. \quad (19)$$

那么接下来我们证明 $\hat{H}_1$ 能写成如下形式

$$\hat{H}_1 = \hat{C}_2 \hat{h} \hat{C}_2, \quad (20)$$

其中 $\hat{h}$ 是任意算符, $\hat{C}_2$ 是群 G 表示的平方卡西米尔算符(quadratic Casimir)

$$\hat{C}_2 = \sum_a \hat{T}_a \hat{T}_a = \sum_a \hat{T}_a^\dagger \hat{T}_a. \quad (21)$$

由于 $\hat{C}_2$ 是半正定的,容易看出疤痕态空间 $\mathcal{S}$ 就是 $\hat{C}_2$ 的零空间。我们可以利用 $\mathcal{R}$ 空间中的一组正交完备基对 $\hat{C}_2$ 作如下分解

$$\hat{C}_2 = \sum_n \lambda_n |\psi_n\rangle\langle\psi_n|, \quad \lambda_n > 0. \quad (22)$$

接着定义如下算符 $\hat{C}_2^{-1}$

$$\hat{C}_2^{-1} = \sum_n \frac{1}{\lambda_n} |\psi_n\rangle\langle\psi_n|, \quad (23)$$

注意上标-1只是表示 $\hat{C}_2$ 在 $\mathcal{S}$ 的补空间 $\mathcal{R}$ 中可逆。那么我们将有如下关系式

$$\begin{aligned} \hat{C}_2 \cdot \hat{C}_2^{-1} &= \hat{C}_2^{-1} \cdot \hat{C}_2 = \sum_n |\psi_n\rangle\langle\psi_n| \\ &= \hat{\mathbb{I}} - \sum_s |\psi_s\rangle\langle\psi_s| \equiv \hat{\mathbb{I}} - \hat{P}_s, \end{aligned} \quad (24)$$

其中 $\hat{\mathbb{I}}$ 是单位算符, $\{|\psi_s\rangle\}$ 是疤痕态空间的一组正交完备基, $\hat{P}_s$ 是疤痕态空间的投影算符。根据上述等式和 $\hat{H}_1$ 湮灭 $\mathcal{S}$ 的条件,我们有

$$\begin{aligned} \hat{H}_1 &= (1 - \hat{P}_s) \hat{H}_1 (1 - \hat{P}_s) \\ &= \hat{C}_2 \cdot (\hat{C}_2^{-1} \hat{H}_1 \hat{C}_2^{-1}) \cdot \hat{C}_2 \equiv \hat{C}_2 \hat{h} \hat{C}_2. \end{aligned} \quad (25)$$

如果我们对 $\hat{C}_2$ 做展开,那么我们可以把 $\hat{H}_1$ 写为如下的一般形式^①

$$\hat{H}_1 = \sum_{ab} \hat{T}_a \cdot (\hat{T}_a \hat{h} \hat{T}_b) \cdot \hat{T}_b \equiv \sum_{ab} \hat{T}_a \hat{h}_{ab} \hat{T}_b. \quad (26)$$

其中 $\hat{h}_{ab} = \hat{h}_{ba}$ 显而易见。用 $\hat{C}_2$ 代替不变子空间定理1中的 $\{\hat{P}_i\}$,则 $\hat{H}_s$ 满足的条件为

$$[\hat{C}_2, \hat{H}_s] = i\hat{C}_2 \hat{O} \hat{C}_2, \quad (27)$$

其中 $\hat{O}$ 为任意厄米算符(如果定义 $\hat{W} = i\hat{C}_2 \hat{O}$,那我们将得到文献[43]中关于 $\hat{H}_s$ 形式的条件)。

建立了这个理论框架后,接下来一个重要问题便是怎么选取群 G 并构造群表示的单重态空间 $\mathcal{S}$,并基于此来构造一个(局域的)疤痕态哈密顿量。注意到无论对于玻色子还是费米子,他们的跃迁算符 $\hat{T}_A, \hat{T}_B$ 分别为

$$\hat{T}_A = \sum_{ij} A_{ij} \hat{c}_i^\dagger \hat{c}_j, \quad \hat{T}_B = \sum_{ij} B_{ij} \hat{c}_i \hat{c}_j^\dagger, \quad (28)$$

其中 A, B 均为任意 N -维厄米矩阵, $c_i^\dagger(c_j)$ 为粒子产生(湮灭)算符,我们都有

$$[\hat{T}_A, \hat{T}_B] = \hat{T}_{[A, B]} \quad (29)$$

所以如果限制矩阵为无迹(traceless)矩阵,那么上述跃迁算符构成的李代数则同构于 $SU(N)$ 群的李代数 $\mathfrak{su}(N)$ 。接下来为了构造出局域的哈密顿量,我们考虑费米子系统中最近邻的跃迁算符

$$\hat{T}_{\langle ij \rangle} = -t(\hat{c}_{i\sigma}^\dagger \hat{c}_{j\sigma} + h.c.), \quad (30)$$

其中 i, j 为格点指标, $\sigma = \{\uparrow, \downarrow\}$ 代表自旋, $\langle ij \rangle$ 表示跃迁限制于最近邻的格点之间。更进一步我们考虑一个二分(bipartite)格点系统,那么计算容易发现跃迁算符 $\hat{T}_{\langle ij \rangle}$ 和下面定义的算符对易,

$$\hat{\eta}^+ \equiv \sum_i (-1)^i \hat{c}_{i\uparrow}^\dagger \hat{c}_{i\downarrow}^\dagger, \quad (31)$$

其中 $(-1)^i = \pm 1$ 的值取决于格点 i 所属的子格(sub-lattice)。由于 $[\hat{T}_{\langle ij \rangle}, \hat{\eta}^+] = 0$,下面定义的状态

① 如果我们定义 $\hat{O}_a = \sum_b \hat{T}_b \hat{h}_{ba}$,那么 $\hat{H}_1$ 也可以写为 $\hat{H}_1 = \sum_a \hat{O}_a \hat{T}_a$ 的形式^[43]。

$$|\eta_n\rangle = \sqrt{\frac{(L-n)!}{L! n!}} (\hat{\eta}^+)^n |0\rangle, \quad (32)$$

其中 n 是非负整数、 L 为总格点数目, 都会被跃迁算符 $\hat{T}_{ij}$ 湮灭。事实上, 如图8所示只要 i 和 j 属于不同子格, 不用计算 $[\hat{T}_{ij}, \hat{\eta}^+]$, 通过对跃迁过程的图像分析我们就能得到 $\hat{T}_{ij}$ 湮灭 $\{|\eta_0\rangle, |\eta_1\rangle, |\eta_2\rangle, \dots\}$ 的结论。 $\hat{H}_s$ 的构造可以从可积的费米子张量模型 (fermionic tensor model) 得到, 形式比较复杂, 我们不在这里深入讨论, 感兴趣的读者可以参考相关文献^[43,71-72]。

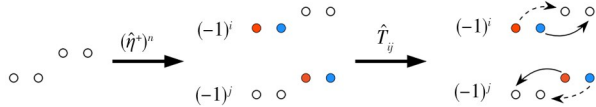


图8 子格跃迁项 $\hat{T}_{ij}$ 湮灭 η -配对态 $|\eta_n\rangle$ 态的实空间过程示意图

把方程(32)式定义的态在实空间展开, 那么 $\hat{T}_{ij}$ 作用后非零的位形分别为 i 格点全占据 (自旋上下分别用红色、蓝色圆代表)、 j 格点为空 (用空心圆表示) 和 j 格点全部占据、 i 格点为空的位形 (这里我们省略了其他格点的占据信息)。算符 $\hat{T}_{ij}$ 作用后跃迁的情况用最右图表示, 其中虚线跃迁过程由于会跨越一个费米子, 因为其相位相对于实线过程差一个负号。显然如果 $(-1)^i + (-1)^j = 0$, 那么两个虚线跃迁过程和两个实线跃迁过程最后都正好抵消, 导致 $\hat{T}_{ij}$ 湮灭 $|\eta_n\rangle$ 。

Figure 8 Schematic illustration of how the η -pairing state $|\eta_n\rangle$ is annihilated by the sublattice hopping term $\hat{T}_{ij}$ in real space

From expression (32), configurations with nonzero contributions upon the action of $\hat{T}_{ij}$ involve either site i being fully occupied (red and blue circles for spin up and spin down, respectively) while site j is empty, or vice versa. Irrelevant configurations at other sites are omitted. The resulting configurations are shown on the rightmost panel. Since the hopping represented by the dashed line must cross a fermion, the associated coefficient has a negative sign relative to that of the solid line. If $(-1)^i + (-1)^j = 0$, the two hopping processes cancel, rendering $\hat{T}_{ij}|\eta_n\rangle = 0$.

1.2.2 准对称方法

在 Shiraishi-Mori 构造中, 疤痕态子空间 $\mathcal{S}$ 是通过希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 做局域投影得到的。不过 Shiraishi-Mori 构造太一般, 构造出来疤痕态能量间距 ΔE 并不一定等间距, 导致物理量在动力学上不一定能展示出周期性。另一方面, 很多具有能量等

间距的疤痕态哈密顿量可以写为两部分 $\hat{H} = \hat{H}_1 + \hat{H}_s$, 疤痕态空间 $\mathcal{S}$ 是 $\hat{H}_1$ 的一个简并空间, $\hat{H}_s$ 负责解除简并让疤痕态能量等间距^[37-38,40,43,48,73-74]。这些模型中, 疤痕态空间 $\mathcal{S}$ 在某个群 $\tilde{G}$ 下保持不变, 所拥有对称性比哈密顿量更高。如果群 $\tilde{G}$ 是紧致李群并且群元 $\tilde{g} \in \tilde{G}$ 能分解为单个格点作用的直积

$$\tilde{g} = \tilde{g}_1 \otimes \tilde{g}_2 \otimes \dots \otimes \tilde{g}_N, \quad (33)$$

其中下标 $1, 2, \dots, N$ 代表格点, 那么群 $\tilde{G}$ 的生成元, 比如其中某个 $U(1)$ 子群的生成元, 就可以用来构造解除简并的 $\hat{H}_s$ 。这里保持某个简并空间 $\mathcal{S}$ 不变, 并且群元具有(33)式中可分解为单格点作用的群 $\tilde{G}$ 被称为准对称群 (quasisymmetry group)。接下来我们具体介绍基于此观察而构造疤痕态的准对称方法^[46-47]。 $\hat{H}_1$ 和 Shiraishi-Mori 构造一样, 也是使用一组投影算符湮灭空间 $\mathcal{S}$ 的投影算符去构造。为此我们先选取一个直接态 $|\phi_0\rangle$, 把 $|\phi_0\rangle$ 限制在 m 个格点构成的集团 $[m]$ 上的直积态记为 $|\phi_{[m]}\rangle$, 并定义如下空间^①

$$\phi_{[m]} \equiv \text{span} \left\{ \hat{d}(\tilde{g}_{[m]}) |\phi_{[m]}\rangle \mid \tilde{g} \in \tilde{G} \right\}, \quad (34)$$

其中 $\tilde{G}$ 是我们选取的准对称群, $\tilde{g}_{[m]}$ 是群元 $\tilde{g}$ 限制在 $[m]$ 上的部分, $\hat{d}(\tilde{g}_{[m]})$ 是群元 $\tilde{g}_{[m]}$ 在相应希尔伯特空间上的表示。选取 $\phi_{[m]}$ 中一组完备正交基矢 $\{|e_i^{[m]}\rangle\}$, 那么我们可以定义 $[m]$ 上的如下投影算符

$$\hat{P}_{[m]} = \hat{\mathbb{I}} - \sum_i |e_i^{[m]}\rangle \langle e_i^{[m]}|. \quad (35)$$

显然准对称群 $\tilde{G}$ 作用在 $|\phi_0\rangle$ 得到的态被任意 $\hat{P}_{[m]}$ 所湮灭, 我们便可依照 Shiraishi-Mori 构造如下定义 $\hat{H}_1$,

$$\hat{H}_1 = \sum_{j=1, \dots, N} \hat{P}_{[j, j+m-1]} \hat{h}_{[j, j+m-1]} \hat{P}_{[j, j+m-1]}, \quad (36)$$

其中 $[j, j+m-1]$ 代表由格点 $j, j+1, \dots, j+m-1$ 这 m 个连续格点构成的集团 $[m]$, $\hat{P}_{[j, j+m-1]}$ 对应(34)式中的定义的局域投影算符, $\hat{h}_{[j, j+m]}$ 是作用于 $[m]$ 上的任意厄米算符。显然, 群 $\tilde{G}$ 作用在 $|\phi_0\rangle$ 上得到的空间 $\phi_{\tilde{G}} \equiv \{\hat{d}(\tilde{g})|\phi_0\rangle \mid \tilde{g} \in \tilde{G}\}$ 总包含在 $\hat{H}_1$ 的零能简并子空间 $\mathcal{S}$ 中, $\phi_{\tilde{G}} \subset \mathcal{S}$, 所以这种构造方法一定能得到疤痕态。由于 $[m]$ 的任意性, 通常来讲 $\mathcal{S} = \phi_{\tilde{G}}$, 这时按之前所述的用群 $\tilde{G}$ 的生成元去构造 $\hat{H}_s$ 会得到一组能量等间距的疤痕态。

① 为了简单起见, 这里我们只考虑最简单的 $|\phi_{[m]}\rangle$ 为直积态的情况, 更一般的情况可以参考原始文献^[46-47]。

下面我们以一维自旋 $S=1$ 的情形为例来阐释准对称方法。我们选取 $\tilde{g}_j \in SO(3)$, $m=2$ 和 $|\phi_{[m]}\rangle = |m_z=1, m_z=1\rangle$ 来构造疤痕态哈密顿量。由于 $|\phi_{[j,j+1]}\rangle$ 对应的两个格点的总自旋 $\hat{J}_{[j,j+1]} = \hat{S}_j + \hat{S}_{j+1}$ 为 $J=2$, $\hat{d}(\tilde{g})$ 为 $[j, j+1]$ 上的转动算符 $\exp(-i\hat{J}_{[j,j+1]} \cdot \theta/\hbar)$, 所以 $\phi_{[j,j+1]}$ 对应两格点总自旋为 2 的空间。相应的投影算符很容易写下来,

$$\hat{P}_{[j,j+1]} = 1 - \frac{1}{24} (\hat{S}_j + \hat{S}_{j+1})^2 \left[(\hat{S}_j + \hat{S}_{j+1})^2 - 2 \right]. \quad (37)$$

取一些 $[j, j+1]$ 上随机的局域 $\hat{h}_{[j,j+1]}$ 算符, 我们按照 (36) 式便可以得到 $\hat{H}_1$ 。 $\hat{H}_s$ 的选取只需要使 $\mathcal{S}$ 是其不变子空间, 最简单的取法当然是 $\hat{H}_s = 0$ 。 我们也可以选取 $\hat{H}_s$ 正比于 $\tilde{G}$ 中的 $U(1)$ 生成元, 比如这个例子中的 $\hat{J}^z = \sum_j \hat{S}_j^z$, 得到一系列能量等间距的疤痕态, 使得动力学上观察到周期振荡变成可能。

1.2.3 Tunnel to Tower 方法

如果哈密顿量的对称群 G 是非阿贝尔群, 那么能量中间的 ϕ_E 往往是简并的, 而且我们可以利用嘉当子代数 (Cartan subalgebra) 对应的好量子数 η_z 对 ϕ_E 中的本征态进行标记^①。此外把 $\hat{\eta}_z$ 对应的升算符 $\hat{\eta}^+$ 反复作用于最低权态 $|\phi_0\rangle$, 我们便能得到整个简并子空间, $\phi_E = \text{span}\{|\phi\rangle, \hat{\eta}^+|\phi\rangle, (\hat{\eta}^+)^2|\phi\rangle, \dots\}$, 如图 9(a) 所示。注意到很多具体模型的疤痕态空间也具有这种结构 (具体参考下一小节), tunnel to tower 方法以此为出发点构造疤痕态哈密顿量, 提供了一个理解疤痕态现象直观的图像^[48]。为简单起见, 我们以 $G = SU(2)$ 群为例, 给定 ϕ_E 中的不同本征态由 $|J, J_z\rangle$ 标记, 阶梯算符 $\hat{\eta}^+ = \hat{J}_x + i\hat{J}_y$ 。由于 $[\hat{H}, \hat{J}] = 0$, ϕ_E 中的本征态 $|J, J_z\rangle$ 仍为 $\hat{H}_2 = \hat{H}_{\text{sym}} + \omega \hat{J}_z$ 的本征态。不过之前 ϕ_E 中 $|J, J_z\rangle$ 的简并被解除, 成为等能量间距 $\Delta E = \omega$ 的一系列新的本征态, 如图 9(b) 所示。为了使指定能量 E 对应的 ϕ_E 中的本征态成为量子多体疤痕态, 我们可以在哈密顿量中再加入一项 $\hat{H}_A$ 使得其能够湮灭 ϕ_E , $\hat{H}_A \phi_E = 0$, 在破除体系的高对称性的同时让 ϕ_E 中对应的本征态成为量子多体疤痕态, 如图 9(c) 所示。从以上过程可

以看出, 为了让 ϕ_E 中的态成为疤痕态, 我们需要其中的态是些低纠缠的态, 否则我们可能不能找到能够湮灭 ϕ_E 的局域的 $\hat{H}_A$ 。关于这一点的更多细节, 我们在后面的局域关联矩阵方法中会涉及到。

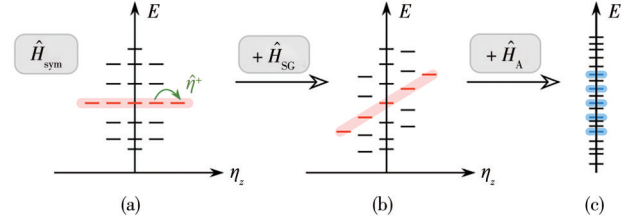


图 9 From tunnel to tower 方法的三步走示意图

(a) 具有非阿贝尔对称性的哈密顿量 $\hat{H}_{\text{sym}}$ 和其嘉当子代数的一个元素 η_z 分辨的能谱图, 其中非阿贝尔对称性赋予的简并态 (红色线标记) 是要构造的疤痕态 (tunnel); 另外 η_z 对应的升算符 $\hat{\eta}^+$ 将把不同的简并态联系起来; (b) 在 $\hat{H}_{\text{sys}}$ 的基础上加入 $\hat{H}_{\text{SG}} = \omega \hat{\eta}_z$ 后的能谱图; 原来简并空间的 tunnel 变成了一个能级等间距的 tower; (c) 由于哈密顿量的高对称性, 第二步得到的 tower 中的态依旧不是疤痕态。在第三步中需要加入湮灭疤痕态空间的 $\hat{H}_A$ 以破坏系统的高对称性, 由此得到最终哈密顿量 $\hat{H} = \hat{H}_{\text{sym}} + \hat{H}_{\text{SG}} + \hat{H}_A$ 的能谱示意图。图中能级等间距的、蓝色标注的疤痕态对应第二步 tower 中的本征态。

Figure 9 Illustrative plot of three stages in “from tunnel to tower” construction

(a) The schematic energy levels of a non-Abelian Hamiltonian plotted against one quantum number η_z of one Cartan subalgebra element. The red levels with a light red background correspond to the target scar subspaces (tunnels). Non-Abelian symmetry allows a raising operator $\hat{\eta}^+$ to map one state to another with a larger η_z ; (b) The energy level spectrum after adding $\hat{H}_{\text{SG}} = \omega \hat{\eta}_z$ to the original Hamiltonian. The tunnel becomes a tower; (c) Due to high symmetry in the second stage, the tower is not a scar subspace yet. Adding an annihilator Hamiltonian $\hat{H}_A$ that annihilates the tower breaks symmetry, dispersing the tower states (blue levels) into the thermal spectrum.

1.3 阶梯算符、疤痕态空间和受限谱生成代数

在 PXP 模型中的疤痕态被发现不久, 在我们熟悉的 AKLT (Affleck-Kennedy-Lieb-Tasaki) 模型、自旋 $S=1$ 的 XY 模型和推广的 Hubbard 模型中也找到了量子多体疤痕态。与 PXP 模型中的疤痕态

① 这里为了简单起见, 我们考虑嘉当子代数只有一个元素的情况。

不同,这些疤痕态的解析表达式可以写下来,疤痕态能级等间距,能量相邻的本征态往往由阶梯算符(ladder operator)联系起来^[36-40,42]。阶梯算符和能级等间距密切相关。如果 $|\psi_0\rangle$ 是系统本征能量为 E_0 的一个本征态,升算符 $\hat{\eta}^+$ 和哈密顿量 $\hat{H}$ 满足如下对易关系,

$$[\hat{H}, \hat{\eta}^+] = \epsilon \hat{\eta}^+, \quad (38)$$

那么 $|\psi_n\rangle \equiv (\hat{\eta}^+)^n |\psi_0\rangle$ 其中 $n \in \mathbb{Z}_+$ 也是系统的本征态(除非为零)

$$\hat{H}|\psi_n\rangle = (E_0 + n\epsilon)|\psi_n\rangle. \quad (39)$$

系统存在 $\hat{\eta}^+$ 升算符(38)式意味着系统存在好量子数。我们把 $\hat{\eta}^+$ 的厄米共轭算符写作 $\hat{\eta} = (\hat{\eta}^+)^{\dagger}$,并仿照角动量算符引入 $\hat{\eta}_z$ 和 $\hat{\eta}^2$,

$$\hat{\eta}_z = \frac{1}{2}[\hat{\eta}^+, \hat{\eta}], \quad \hat{\eta}^2 = \frac{1}{2}(\hat{\eta}^+ \hat{\eta} + \hat{\eta} \hat{\eta}^+) + \hat{\eta}_z^2. \quad (40)$$

首先对(38)式两边取厄米共轭我们有

$$[\hat{H}, \hat{\eta}] = -\epsilon \hat{\eta}. \quad (41)$$

从雅克比恒等式可以直接看出 η_z 是好量子数,

$$\begin{aligned} 0 &= [[\hat{\eta}^+, \hat{\eta}], \hat{H}] + [[\hat{\eta}, \hat{H}], \hat{\eta}^+] + [[\hat{H}, \hat{\eta}^+], \hat{\eta}] \\ &= 2[\hat{\eta}_z, \hat{H}] + \epsilon[\hat{\eta}, \hat{\eta}^+] + \epsilon[\hat{\eta}^+, \hat{\eta}] = 2[\hat{\eta}_z, \hat{H}]. \end{aligned}$$

另外,由于 $[\hat{H}, \hat{\eta}^+ \hat{\eta}] = [\hat{H}, \hat{\eta}^+] \hat{\eta} + \hat{\eta}^+ [\hat{H}, \hat{\eta}] = 0$,所以 η^2 也是好量子数, $[\hat{H}, \hat{\eta}^2] = 0$ 。尽管满足(38)式的算符 $\hat{\eta}^+$ 的存在能给我们一系列能量等间距的本征态,但是这也导致系统高的对称性(比如好量子数 η_z 和 η^2),使得 $|\psi_n\rangle$ 并不一定是量子多体疤痕态。另一方面,为了使 $\hat{\eta}^+|\psi_0\rangle$ 为本征能量为 $E_0 + \epsilon$ 的本征态,我们只需要

$$([\hat{H}, \hat{\eta}^+] - \epsilon \hat{\eta}^+) |\psi_0\rangle = 0. \quad (42)$$

特别是,我们容易证明如下子空间的算符定理。

定理2 (子空间的算符定理)。对于哈密顿量 $\hat{H}$ 和它的一个本征能量为 E_0 的本征态 $|\psi_0\rangle$,如果存在包含 $|\psi_0\rangle$ 的一个子空间 $\mathcal{S}$ 和算符 $\hat{\eta}^+$ 使得 $\hat{\eta}^+ \mathcal{S} \subset \mathcal{S}$,并且

$$([\hat{H}, \hat{\eta}^+] - \epsilon \hat{\eta}^+) \mathcal{S} = 0. \quad (43)$$

那么 $|\psi_n\rangle \equiv (\hat{\eta}^+)^n |\psi_0\rangle$,如果不为零,则哈密顿量 $\hat{H}$ 本征能量为 $E_0 + n\epsilon$ 本征态。

根据以上定理,如果 $[\hat{H}, \hat{\eta}^+] = \epsilon \hat{\eta}^+ + \hat{A}$,其中 $\hat{A}$

算符能湮灭某个空间 $\mathcal{S}$,而且存在 $|\psi_0\rangle \in \mathcal{S}$ 的一个本征态,那么 $\mathcal{S}$ 往往是系统的疤痕态空间^[42]。所以我们可以分两步走,第一步找到满足条件(38)式,然后再加入一些无序项来破坏对称性使得 $\mathcal{S}$ 成为系统的疤痕态空间。

1.3.1 η -配对

尽管我们的目的是找到尽管我们的目的是找到 $\hat{\eta}^+$ 和对应的疤痕态空间 $\mathcal{S}$,理解一些具体系统中算符意义下(38)式背后的物理图像能给我们在一般多体系统中构造 $\hat{\eta}^+$ 和 $\mathcal{S}$ 提供更多灵感。基于此考虑,我们将先简要介绍二分格点系统(bipartite lattice)中Hubbard模型的 η -配对^[75-76]。众所周知,Hubbard模型的哈密顿量写作

$$\begin{aligned} \hat{H} &= -t \sum_{\langle ij \rangle, s} (\hat{c}_{is}^{\dagger} \hat{c}_{js} + h.c.) + U \sum_i \hat{n}_i \hat{n}_{i\downarrow} - \\ &\quad \mu \sum_{i,s} \hat{n}_{is} \equiv \hat{T} + \hat{W}, \end{aligned} \quad (44)$$

其中 $\hat{c}_{is}(\hat{c}_{is}^{\dagger})$ 是格点 i 上自旋为 s 的Dirac费米子湮灭(产生)算符, $\hat{n}_{is} = \hat{c}_{is}^{\dagger} \hat{c}_{is}$ 是粒子数算符, t 、 U 和 μ 分别是近邻 $\langle ij \rangle$ 跃迁强度、在位(on-site)相互作用强度和化学势。这里为了叙述方便,我们把哈密顿量中的第一项(动能项)记作 $\hat{T}$,把其余的相互作用和化学势项记为势能项 $\hat{W}$ 。如果体系是由两组等价的子格构成的二分格点系统,那么我们可以构造如下 $\hat{\eta}^+$ 算符

$$\hat{\eta}^+ = \sum_i e^{-i\pi \cdot \mathbf{R}_i} \hat{c}_{i\uparrow}^{\dagger} \hat{c}_{i\downarrow} \equiv \sum_i (-1)^i \hat{c}_{i\uparrow}^{\dagger} \hat{c}_{i\downarrow}, \quad (45)$$

其中 $(-1)^i$ 在不同子格上取 ± 1 ,使得(38)式成立。对易关系 $[\hat{H}, \hat{\eta}^+] = (U - 2\epsilon) \hat{\eta}^+$ 容易通过计算得出,不过运用下面简单的定理将给我们的理解提供更多的洞见。

定理3 (本征算符定理)。把哈密顿量 $\hat{H}$ 本征能量为 E_n 的本征态记作 $|n\rangle$,如果对于所有 $|n\rangle$,算符 $\hat{\eta}^+$ 作用之后不为零的 $\hat{\eta}^+|n\rangle$ 是 $\hat{H}$ 本征能量为 $E_n + \epsilon$ 的本征态,那么如下算符恒等式成立

$$[\hat{H}, \hat{\eta}^+] = \epsilon \hat{\eta}^+. \quad (46)$$

证明 把对易子 $[\hat{H}, \hat{\eta}^+]$ 写开,并在右边插入完备基恒等式 $\hat{\mathbb{I}} = \sum_n |n\rangle \langle n|$,容易得到

$$\begin{aligned} [\hat{H}, \hat{\eta}^+] &= \sum_n (\hat{H} \hat{\eta}^+ - \hat{\eta}^+ \hat{H}) |n\rangle \\ &= \sum_n \epsilon \hat{\eta}^+ |n\rangle \langle n| = \epsilon \hat{\eta}^+, \end{aligned}$$

其中第二个等号用到了不为零的 $\hat{\eta}^+|n\rangle$ 为本征能量 $E_n + \epsilon$ 的本征态这个条件。

在动量空间, $\hat{\eta}^+$ 算符可以写为 $\hat{\eta}^+ = \sum_{\mathbf{k}} \hat{c}_{\mathbf{k}, \uparrow}^\dagger \hat{c}_{\pi-\mathbf{k}, \downarrow}^\dagger$, 也就是说产生一对动量为 $\mathbf{k}$ 和 $\pi - \mathbf{k}$ 的粒子。因为这对粒子的动能之和为零, 根据上述定理 $\hat{\eta}^+$ 和动能项对易 $[\hat{\eta}^+, \hat{T}] = 0$ 。同理, 在实空间由于 $\hat{\eta}^+$ 在同一格点上产生一对自旋相反的粒子, 对应的势能项 $\hat{W}$ 增加 $U - 2\mu$, 所以 $[\hat{W}, \hat{\eta}^+] = (U - 2\mu)\hat{\eta}^+$ 。对于 Hubbard 模型, 显然没有粒子占据的真空态 $|0\rangle$ 是系统能量为零的本征态, 由前所述 $M+1$ (M 为系统的总格点数) 个态 $|\psi_n\rangle = (\hat{\eta}^+)^n |0\rangle, n=0, 1, \dots, M$ 为本征能量为 $E_n = n(U - 2\mu)$ 的本征态。简单计算可知 $|0\rangle$ 态对应 η^2 和 η_z 的好量子数,

$$\begin{aligned} \hat{\eta}^z |0\rangle &= \frac{1}{2} \sum_i (\hat{n}_i - 1) |0\rangle \\ &= -\frac{M}{2} |0\rangle, \hat{\eta}^2 |0\rangle \\ &= \frac{M}{2} \left(\frac{M}{2} + 1 \right) |0\rangle. \end{aligned} \quad (47)$$

由于 $\hat{\eta}^+$ 增加两个粒子, $[\hat{\eta}_z, \hat{\eta}^+] = \hat{\eta}^+$, 我们可以定义

$$\hat{\eta}_x = \frac{\hat{\eta}^+ + \hat{\eta}}{2}, \quad \hat{\eta}_y = \frac{\hat{\eta}^+ - \hat{\eta}}{2i}, \quad (48)$$

使得 $\hat{\eta}_x, \hat{\eta}_y, \hat{\eta}_z$ 满足角动量的对易关系。所以 $\hat{\eta}_{x,y,z}$ 构成体系的赝自旋(pseudospin), 当然这点也可以通过原来总自旋 $\hat{S} = \sum_{i,s} \hat{c}_{is} \sigma_{ss} \hat{c}_{is}^\dagger$ 做部分粒子-空穴变换(partial particle-hole transformation)看出^[77] (其中 $\sigma = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ 为泡利矩阵)。值得一提的是, 当 $U = 2\mu$ 时, $[\hat{H}, \hat{\eta}_{x,y,z}] = 0$, 系统除了有总自旋 $\hat{S}$ 对应的全局 $SU(2)$ 对称性, 也有 $\hat{\eta}_{x,y,z}$ 赝自旋对应的另外一组全局 $SU(2)$ 对称性, 体系总的对称性是 $SU(2) \times SU(2)/\mathbb{Z}_2 \cong SO(4)$ 。这里模 $\mathbb{Z}_2$ 的原因是 $2\eta_z$ 和 $2S_z$ 的奇偶性相同^[76,78]。另外一种看待 $SO(4)$ 对称性的方法是把哈密顿量用 Majorana 费米子写下来^[79-80]。从 $\hat{\eta}_z$ 的表达式可以看出 η^2 的最大值为 $\frac{M}{2} \left(\frac{M}{2} + 1 \right)$, 所以 $|\psi_n\rangle$ 为对应好量子数 (η^2, η_z) 区间的唯一的态, 因此并不能算作疤痕态。

对于在一般格点上定义的跃迁项为

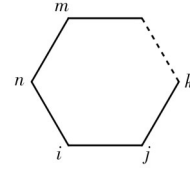
$$\hat{T} = - \sum_{\langle ij \rangle, ss'} (t_{is, js'} \hat{c}_{is}^\dagger \hat{c}_{js'} + t_{is, js'}^* \hat{c}_{js'}^\dagger \hat{c}_{is}), \quad (49)$$

的 Hubbard 模型, 假设我们可以构造如下形式的 $\hat{\eta}^+$ 算符,

$$\hat{\eta}^+ = \sum_i q_i \hat{c}_{i, \uparrow}^\dagger \hat{c}_{i, \downarrow}^\dagger. \quad (50)$$

使得 $[\hat{T}, \hat{\eta}^+] = 0$ 。简单计算可知 q_i 必须满足如下的局域条件(为了下面讨论方便我们把 q_i/q_j 满足的条件写成了两部分)

$$\begin{aligned} \frac{q_i}{q_j} &= -\frac{t_{i, \uparrow, j, \uparrow}}{t_{i, \downarrow, j, \downarrow}^*} = -\frac{t_{i, \downarrow, j, \downarrow}}{t_{i, \uparrow, j, \uparrow}^*}, \\ \frac{q_i}{q_j} &= \frac{t_{i, \downarrow, j, \uparrow}}{t_{i, \uparrow, j, \downarrow}^*} = \frac{t_{i, \uparrow, j, \downarrow}}{t_{i, \downarrow, j, \uparrow}^*}, \quad \forall \langle ij \rangle. \end{aligned} \quad (51)$$



显然 $\langle ij \rangle$ 之间的跃迁强度必须满足条件使得 $|q_i/q_j| = 1$ 。除此之外, 跃迁强度还必须满足如下全局条件: 对任意元格(plaquette) $t_{is, js'}$ 必须满足

$$\frac{q_i}{q_j} \frac{q_j}{q_k} \dots \frac{q_m}{q_n} \frac{q_n}{q_i} = 1. \quad (52)$$

下面我们有针对性地讨论两个常见情况。首先我们考虑系统中自旋守恒并且跃迁强度和自旋无关, $t_{is, js'} = t_{ij} \delta_{ss'}$, 的情况。用 l 代表 $\langle ij \rangle$ 之间的边, 并把 t_{ij} 记作 $t e^{i\phi_l}$ 其中 $t \in \mathbb{R}_+$, 那么局域条件(51)式自动满足。全局条件(52)式要求对系统格点的任何元格(plaquette) $\odot$

$$1 = \prod_{l \in \odot} (-e^{2i\phi_l}) = (-1)^{|\odot|} e^{2i\Phi_\odot}, \quad (53)$$

其中 $|\odot|$ 为回路 $\odot$ 边的数目, $\Phi_\odot = \sum_{l \in \odot} \phi_l$ 可以看做是回路 $\odot$ 中的总磁通。对于正方形这样的二分格点系统格点, Hubbard 模型中实常数的跃迁强度即可保证 η -配对的存在。对于三角格点这样元格 $\triangle$ 的边为奇数的格点, 我们则要求元格中的总磁通要满足

$$\Phi_\triangle = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}. \quad (54)$$

的条件^[81]。我们接下来考虑另外一个结论简单的具体情况, 二分格点系统上除了有实常数的跃迁项还有自旋-轨道耦合的跃迁项, 这时条件(51)式为

$$\frac{q_i}{q_j} = -1 = \frac{t_{i, \uparrow, j, \downarrow}}{t_{i, \downarrow, j, \uparrow}^*}. \quad (55)$$

对于二分格点, 全局条件(52)式也自动满足, η -配对存在最简单的情况为自旋-轨道跃迁强度为实数并且 $t_{i, \uparrow, j, \downarrow} = -t_{i, \downarrow, j, \uparrow}$ ^[82]。

有了这些准备工作, 我们可以在满足 η -配对的

一般性的 Hubbard 型哈密顿量的基础上再引入次近邻相互作用 $\hat{V} = \sum_{\langle ij \rangle, ss'} V_{is, js'} \hat{n}_{is} \hat{n}_{js'}$, 并要求它对 η -配对态 $(\hat{\eta}^+)^n |0\rangle$ 的贡献为零。由于 η -配对态中格点上的粒子数成对出现, 所以局域条件 $\sum_{ss'} V_{is, js'} = 0$, 可以保证次近邻相互作用的能量贡献为零。这个时候对于 $\hat{\eta}^+ = \sum_i q_i \hat{c}_{i\uparrow}^\dagger \hat{c}_{i\downarrow}^\dagger$ 反复作用于真空态 $|0\rangle$ 这样的格点占据成对出现的态空间 $\mathcal{S} = \text{span}\{|0\rangle, \hat{\eta}^+ |0\rangle, \dots, (\hat{\eta}^+)^M |0\rangle\}$ 我们有

$$([\hat{H}, \hat{\eta}^+] - (U - 2\mu)\hat{\eta}^+) \mathcal{S} = 0. \quad (56)$$

在算符意义上 $[\hat{H}, \hat{\eta}^+] \neq (U - 2\mu)\hat{\eta}^+$, 也就是说 η^2 、 η_z 不再是好量子数。另外可以证明 $|\psi_n\rangle$ 这样的态有相对低的纠缠熵^[83], 所以 $|\psi_n\rangle = (\hat{\eta}^+)^n |0\rangle$ 便成了系统的疤痕态。

1.3.2 受限谱生成代数 (Restricted Spectrum Generating Algebras, RSGA)

上面我们以推广的 Hubbard 模型为例, 通过考察 $\mathcal{S}$ 中的任意态被 $[\hat{H}, \hat{\eta}^+] - \epsilon \hat{\eta}^+$ 湮灭这一点来保证 $\mathcal{S}$ 是疤痕态空间。和这种方法等价, 有时候更容易操作的一种方法是 Moudgalya, Regnault 和 Bernevig 引入的受限谱生成代数 (Restricted Spectrum Generating Algebras, RSGA) 的方法^[37]。在这种方法中, 我们是通过考察 $|\psi_0\rangle$ 和 $\hat{H}$ 及 $\hat{\eta}^+$ 的反复对易子来保证 (43) 式的成立。

我们首先介绍这个方法中两个重要定理, 然后再结合具体例子予以阐明。为了叙述方便, 和 Hubbard 模型中真空态类似, 我们首先选取哈密顿量 $\hat{H}$ 的一个本征能量为 E_0 的本征态 $|\psi_0\rangle$ 以定义相应的 η -配对态 $|\psi_n\rangle = (\hat{\eta}^+)^n |\psi_0\rangle$, 并且用 $\hat{H}_n$ 表示 $\hat{H}$ 和 $\hat{\eta}^+$ 的反复对易子,

$$\hat{H}_0 \equiv \hat{H}, \quad \hat{H}_{n+1} \equiv [\hat{H}_n, \hat{\eta}^+], \quad \forall n \geq 0. \quad (57)$$

定理4 (RSGA-1)。对于算符 $\hat{\eta}^+$ 、哈密顿量 $\hat{H}$ 和其能量为 E_0 的本征态 $|\psi_0\rangle$, 如果 $\hat{\eta}^+ |\psi_0\rangle \neq 0$ 并满足如下条件

$$(i) [\hat{H}, \hat{\eta}^+] |\psi_0\rangle = \epsilon \hat{\eta}^+ |\psi_0\rangle,$$

$$(ii) [[\hat{H}, \hat{\eta}^+], \hat{\eta}^+] = 0,$$

那么

$$\hat{H} |\psi_n\rangle = (E_0 + n\epsilon) |\psi_n\rangle \text{ 或者 } |\psi_n\rangle = 0. \quad (58)$$

证明 如果 $|\psi\rangle$ 是哈密顿量 $\hat{H}$ 的本征态并且 $[\hat{H}, \hat{\eta}^+] |\psi\rangle = \epsilon \hat{\eta}^+ |\psi\rangle$, 那么显而易见 $\hat{\eta}^+ |\psi\rangle$, 除非为零, 是 $\hat{H}$ 本征能量为 $E_0 + \epsilon$ 的本征态。根据这个观察, 我们将使用数学归纳法证明这个定理。首先我们假设 $|\psi_{n-1}\rangle$ 和 $|\psi_n\rangle$ 非零 (如果某一步 $|\psi_n\rangle$ 变为零那定理自然成立)。假设对于 $n \geq 1$ 我们有 $[\hat{H}, \hat{\eta}^+] |\psi_{n-1}\rangle = \epsilon \hat{\eta}^+ |\psi_{n-1}\rangle$ 使得 $|\psi_n\rangle$ 是本征能量为 $E + n\epsilon$ 的本征态, 那么根据条件 (ii) 我们有 $0 = ([\hat{H}, \hat{\eta}^+] \hat{\eta}^+ - \hat{\eta}^+ [\hat{H}, \hat{\eta}^+]) |\psi_{n-1}\rangle, \Rightarrow ([\hat{H}, \hat{\eta}^+] - \epsilon \hat{\eta}^+) |\psi_n\rangle = 0$ 。

所以如果 $|\psi_{n+1}\rangle = \hat{\eta}^+ |\psi_n\rangle$ 不为零, 它便是 $\hat{H}$ 本征能量为 $E_0 + (n+1)\epsilon$ 的本征态。

定理5 (RSGA-M)。对于算符 $\hat{\eta}^+$ 、哈密顿量 $\hat{H}$ 和其能量为 E_0 的本征态 $|\psi_0\rangle$, 如果对于所有 $n \leq M$ 都有 $(\hat{\eta}^+)^n |\psi_0\rangle \neq 0$ 并且如下条件满足

$$(i) \hat{H}_1 |\psi_0\rangle = \epsilon |\psi_1\rangle,$$

$$(ii) \hat{H}_n |\psi_0\rangle = 0 \quad \forall n, \quad 2 \leq n \leq M,$$

$$(iii) \hat{H}_{M+1} = 0,$$

那么

$$\hat{H} |\psi_n\rangle = (E_0 + n\epsilon) |\psi_n\rangle \text{ 或者 } |\psi_n\rangle = 0. \quad (59)$$

证明 在正式证明定理之前, 我们先检验一下最开始的几个 n 以便能对此定理的内容有一个直观感觉, 从而为定理证明做好准备。对于 $n=2$, 根据条件 (ii), $0 = \hat{H}_2 |\psi_0\rangle$, 并对其中的对易子 $\hat{H}_2 = [[\hat{H}, \hat{\eta}^+], \hat{\eta}^+]$ 做展开会得到下式

$$[\hat{H}, \hat{\eta}^+] \hat{\eta}^+ |\psi_0\rangle - \hat{\eta}^+ [\hat{H}, \hat{\eta}^+] |\psi_0\rangle = ([\hat{H}, \hat{\eta}^+] - \epsilon \hat{\eta}^+) \hat{\eta}^+ |\psi_0\rangle = 0.$$

这说明 $|\psi_2\rangle$, 如果不为零, 是 $\hat{H}$ 的本征态。对于 $n=3$, 我们把 $[[[\hat{H}, \hat{\eta}^+], \hat{\eta}^+], \hat{\eta}^+] |\psi_0\rangle = 0$ 最外层的对易子展开两次会得到如下关系式

$$([\hat{H}, \hat{\eta}^+](\hat{\eta}^+)^2 - 2\hat{\eta}^+ [\hat{H}, \hat{\eta}^+] \hat{\eta}^+ + (\hat{\eta}^+)^2 [\hat{H}, \hat{\eta}^+]) |\psi_0\rangle = 0.$$

由于 $[\hat{H}, \hat{\eta}^+] |\psi_0\rangle = \epsilon \hat{\eta}^+ |\psi_0\rangle$ 和 $[\hat{H}, \hat{\eta}^+] |\psi_1\rangle = \epsilon \hat{\eta}^+ |\psi_1\rangle$, 上述关系式可以改写为

$$([\hat{H}, \hat{\eta}^+] - \epsilon \hat{\eta}^+)(\hat{\eta}^+)^2 |\psi_0\rangle = 0.$$

因此 $|\psi_4\rangle$, 如果不为零, 便是 $\hat{H}$ 的本征能量为 $E_0 + 4\epsilon$ 的本征态。接下来我们用数学归纳法证明该

$$\begin{aligned} \left[[\hat{H}, \hat{\eta}^+], \underbrace{\hat{\eta}^+, \dots, \hat{\eta}^+}_{n \text{ 个 } \hat{\eta}^+} \right] |\psi_0\rangle &= \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k (\hat{\eta}^+)^k [\hat{H}, \hat{\eta}^+] (\hat{\eta}^+)^{n-k} |\psi_0\rangle \\ &= ([\hat{H}, \hat{\eta}^+] - \epsilon \hat{\eta}^+) (\hat{\eta}^+)^n |\psi_0\rangle = 0. \end{aligned}$$

其中第一个等式由对最外层的对易子做了 n 次展开得到(其展开系数容易由数学归纳法证明), 第二个等式利用了归纳法的假设条件和二项式展开定理

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k = (1-1)^n = 0.$$

所以结合条件(i)和(ii), 我们便用归纳法证明了对于 $n=0, 1, \dots, M+1$, $|\psi_n\rangle$ 只要非零, 那么便是 $\hat{H}$ 本征能量为 $E_0 + n\epsilon$ 的本征态。根据条件(iii)并参照RSGA-1定理的证明, 我们便能得到对于所有的 n , 只要 $|\psi_n\rangle$ 非零, 其必定是 $\hat{H}$ 本征能量为 $E_0 + n\epsilon$ 的本征态。

下面我们以一维自旋 $S=1$ 的AKLT模型为例来说明RSGA方法的用处。和Majumdar-Ghosh模型类似, AKLT模型的哈密顿量也是一系列局域投影算符的和^[84],

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \sum_j \sum_{m=-2}^2 \hat{P}_{2,m}^{j,j+1} \\ &= \sum_j \sum_{m=-2}^2 |J_{2,m}^{j,j+1}\rangle \langle J_{2,m}^{j,j+1}|, \end{aligned} \quad (60)$$

其中 j 为格点指标, $\hat{P}_{2,m}^{j,j+1}$ 是格点 j 和 $j+1$ 上总自旋 $J=2, z$ 分量 $J_z=m$ 的投影算符, $|J_{2,m}^{j,j+1}\rangle$ 为量子数为 $(J, J_z)=(2, m)$ 的态。因为 $\sum_{m=-2}^2 \hat{P}_{2,m}^{j,j+1} \equiv \hat{P}_2^{j,j+1}$ 对应 $\hat{S}_j$ 和 $\hat{S}_{j+1}$ 总自旋 $J=2$, 也就是 $\hat{S}_j \cdot \hat{S}_{j+1}$ 取值为1对应空间的投影算符, AKLT模型的哈密顿量可以写为如下形式

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \sum_j \frac{1}{6} (\hat{S}_j \cdot \hat{S}_{j+1} + 1) (\hat{S}_j \cdot \hat{S}_{j+1} + 2) = \\ &= \sum_j \left[\frac{1}{6} (\hat{S}_j \cdot \hat{S}_{j+1})^2 + \frac{1}{2} \hat{S}_j \cdot \hat{S}_{j+1} + \frac{\hat{1}}{3} \right], \end{aligned} \quad (61)$$

其中 $\hat{1}$ 是单位算符。接下来, 我们将利用RSGA的方法来证明周期性边界条件下系统格点数为偶数时, 该模型中存在如下系列本征态(疤痕态)

$$|\mathcal{S}_{2n}\rangle = (\hat{Q}^+)^n |G\rangle, \quad \hat{Q}^+ = \sum_j (-1)^j (\hat{S}_j^+)^2, \quad (62)$$

定理, 假设对于所有的 $k \leq n-1$ 如下条件成立 $([\hat{H}, \hat{\eta}^+] - \epsilon \hat{\eta}^+) |\psi_k\rangle = 0$ 。对 $\hat{H}_{n+1}$ 最外层的对易子如上展开 $n-1$ 次,

其中 $|G\rangle$ 是系统的基态, $\hat{S}_j^+ = \hat{S}_j^x + i\hat{S}_j^y$ 是格点 j 上的自旋升算符。RSGA方法的出发点是计算如下的对易子

$$[\hat{H}, \hat{Q}^+] = \sum_{j=1} (-1)^j [\hat{P}_2^{j,j+1}, (\hat{S}_j^+)^2 - (\hat{S}_{j+1}^+)^2]. \quad (63)$$

显然由于哈密顿量的局域性, 我们只需要计算 $[\hat{P}_2^{j,j+1}, (\hat{S}_j^+)^2 - (\hat{S}_{j+1}^+)^2]$, 方便起见, 我们把 $(\hat{S}_j^+)^2 - (\hat{S}_{j+1}^+)^2$ 记为 $\hat{Q}_j^+$, 并在不引起混淆的情况下省略很多式子中标记相邻格点 $j, j+1$ 的上下标。下面计算中我们将反复用到 $\hat{Q}_j^+$ 作用于 $j, j+1$ 两格点总自旋表象 $|J_{j,j}\rangle$ 的关系式。简单计算可知在九个基矢 $|J_{j,j}\rangle$ 中只有下面四个不为零,

$$\hat{Q}_j^+ |J_{2,-2}\rangle = 2\sqrt{2} |J_{1,0}\rangle, \quad \hat{Q}_j^+ |J_{2,-1}\rangle = 2 |J_{1,1}\rangle, \quad (64)$$

$$\hat{Q}_j^+ |J_{1,0}\rangle = -2\sqrt{2} |J_{2,2}\rangle, \quad \hat{Q}_j^+ |J_{1,-1}\rangle = -2 |J_{2,1}\rangle. \quad (65)$$

利用总角动量的基矢, 我们容易把 $\hat{Q}_j^+$ 的具体表达式写出来,

$$\begin{aligned} (\hat{S}_j^+)^2 - (\hat{S}_{j+1}^+)^2 &= 2\sqrt{2} (|J_{1,0}\rangle \langle J_{2,-2}| - \\ &|J_{2,2}\rangle \langle J_{1,0}|) + 2(|J_{1,1}\rangle \langle J_{2,-1}| - |J_{2,1}\rangle \langle J_{1,-1}|). \end{aligned} \quad (66)$$

另一方面, $\hat{Q}_j^+$ 每次将总自旋的 J_z 增加二, $J_z \rightarrow J_z + 2$, 如果作用两次, 那只有 $|J_{2,-2}\rangle$ 不为零,

$$(\hat{Q}_j^+)^2 |J_{2,-2}\rangle = -2\hat{Q}_j^+ \hat{Q}_{j+1}^+ |J_{2,-2}\rangle = -8 |J_{2,2}\rangle, \quad (67)$$

那么 $(\hat{Q}_j^+)^2$ 的谱分解为如下形式

$$(\hat{Q}_j^+)^2 = -8 |J_{2,2}\rangle \langle J_{2,2}|. \quad (68)$$

有了以上关系式, 下面的计算将容易很多。利用 $\hat{Q}_j^+$ 的表达式(66)式,

$$\begin{aligned} [\hat{P}_2^{j,j+1}, \hat{Q}_j^+] &= -2\sqrt{2} (|J_{2,2}\rangle \langle J_{1,0}| + |J_{1,0}\rangle \langle J_{2,-2}|) - \\ &2(|J_{2,2}\rangle \langle J_{1,0}| + |J_{1,1}\rangle \langle J_{2,-1}|). \end{aligned} \quad (69)$$

我们可以把这个对易子写为如下形式

$$\begin{aligned} [\hat{P}_2^{j,j+1}, \hat{Q}_j^+] &= \hat{Q}_j^+ - 4\sqrt{2}|J_{1,0}\rangle\langle J_{2,-2}| - \\ &4|J_{1,1}\rangle\langle J_{2,-1}|. \end{aligned} \quad (70)$$

所以对于偶数格点、周期性边界条件我们有

$$\begin{aligned} [\hat{H}, \hat{Q}^+] &= 2\hat{Q}^+ + 4\sum_j (-1)^{j+1} \left(\sqrt{2}|J_{1,0}\rangle\langle J_{2,-2}| + \right. \\ &\left. |J_{1,1}\rangle\langle J_{2,-1}| \right)_{j,j+1}. \end{aligned} \quad (71)$$

由于周期性边界条件下 AKLT 模型的基态 $|G\rangle$ 被所有的 $\hat{P}_{2,m}^{j,j+1}$ 湮灭^[85], 所以 RSGA-M 中的条件(ii) 成立,

$$[\hat{H}, \hat{Q}^+]|G\rangle = 2\hat{Q}^+|G\rangle \equiv 2|\psi_1\rangle. \quad (72)$$

接下来我们计算 $\hat{P}_2^{j,j+1}$ 与 $\hat{Q}_j^+$ 的二阶对易子,

$$\begin{aligned} [[\hat{P}_2^{j,j+1}, \hat{Q}_j^+], \hat{Q}_j^+] &= \hat{P}_2^{j,j+1}(\hat{Q}_j^+)^2 - 2\hat{Q}_j^+ \hat{P}_2^{j,j+1} \hat{Q}_j^+ + \\ &(\hat{Q}_j^+)^2 \hat{P}_2^{j,j+1}. \end{aligned} \quad (73)$$

利用 $\hat{P}_2^{j,j+1} = \sum_{m=-2}^2 |J_{2,m}\rangle\langle J_{2,m}|$ 和图 10 中 $\hat{Q}_j^+$ 谱分解中左矢和右矢的连接图, 容易看出

$$\begin{aligned} \hat{Q}_j^+ \hat{P}_2^{j,j+1} \hat{Q}_j^+ &= 0, [[\hat{P}_2^{j,j+1}, \hat{Q}_j^+], \hat{Q}_j^+] = \\ &-16|J_{2,2}\rangle\langle J_{2,-2}|, \end{aligned} \quad (74)$$

所以 $[[\hat{H}, \hat{Q}^+], \hat{Q}^+]|G\rangle = 0$ 。根据 $\hat{Q}_j^+$ 每次把 J_z 增加二的特性和算符恒等式 $\hat{Q}_j^+ \hat{P}_2^{j,j+1} \hat{Q}_j^+ = 0$, $\hat{P}_2^{j,j+1}$ 和 $\hat{Q}_j^+$ 三阶及以上对易子均为零。以上分析可见 AKLT 模型对应于 RSGA-M 定理中 $M=2$ 的情况, $|\mathcal{S}_{2n}\rangle \equiv (\hat{Q}^+)^n |G\rangle$ 是系统的本征态(进一步计算表明一些高能本征态的确为疤痕态^[36,86])。

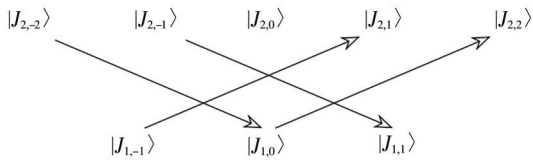


图 10 $\hat{Q}_j^+$ 谱分解示意图

从 $|J_{j_1, m_1}\rangle$ 到 $|J_{j_2, m_2}\rangle$ 带箭头的线代表 $\hat{Q}_j^+$ 中有正比于分解示意图。所以只有当 $|J_{j,m}\rangle$ 对应于箭头的开始和结束时, $\hat{Q}_j^+ |J_{j,m}\rangle$ 和 $\langle J_{j,m} | \hat{Q}_j^+$ 才不为零。

Figure 10 A schematic plot of the spectral decomposition of the $\hat{Q}_j^+$

A term $|J_{j_2, m_2}\rangle\langle J_{j_1, m_1}|$ (coefficient omitted) in the decomposition is represented by an arrow pointing from $|J_{j_1, m_1}\rangle$ to $|J_{j_2, m_2}\rangle$. As a result, $\hat{Q}_j^+ |J_{j,m}\rangle$ and $\langle J_{j,m} | \hat{Q}_j^+$ are nonzero only if $|J_{j,m}\rangle$ has an arrow pointing from it or to it, respectively.

对于 AKLT 模型, RSGA-2 成立的核心主要有两点: (i) 基态 $|G\rangle$ 被任意 $\hat{P}_{2,m}^{j,j+1}$ 湮灭, $[\hat{H}, \hat{Q}^+] - 2\hat{Q}^+$ 的谱分解包含项的形式为 $|J_{j_1, m_1}\rangle\langle J_{j_2, m_2}|$, 从而 $([\hat{H}, \hat{Q}^+] - 2\hat{Q}^+)|G\rangle = 0$ 使得 $\hat{Q}^+|G\rangle$ 为系统本征态; (ii) 由于 $\hat{Q}_j^+ \hat{P}_2^{j,j+1} \hat{Q}_j^+ = 0$, 所以二阶对易子只有首尾两项不为零, 三阶及以上对易子为零。这启发我们还可以构造更一般的哈密顿量^[42]

$$\hat{H}' = \hat{H} + \sum_j \sum_{m,n=-2,-1,0} \left[\xi_{m,n}^j (|J_{2,m}\rangle\langle J_{2,n}|)_{j,j+1} + \text{h.c.} \right], \quad (75)$$

其中 $\xi_{m,n}^j \in \mathbb{C}$ 为任意复数, 使得 $(\hat{Q}^+)^n |G\rangle$ 是系统的本征态。对于加入 AKLT 哈密顿量中的项 $\hat{H}_1 = (|J_{j_1, m_1}\rangle\langle J_{j_2, m_2}| + \text{h.c.})_{j,j+1}$, 我们希望 $[\hat{H}_1, \hat{Q}^+]|G\rangle = 0$, 所以我们取 $j_1 = j_2 = 2$ 并限制 m_1, m_2 取 $-2, -1, 0$ 。另一方面, $\hat{H}_1$ 取这样的形式, 那么 $\hat{H}_1 \hat{Q}^+ = 0$, 核心条件(ii)也能满足。

以上结论可以利用子空间的自征态定理证明, 通过分析 $[\hat{H}, \hat{Q}^+]$ 和 $|\psi_n\rangle = (\hat{Q}^+)^n |G\rangle$ 的结构来得到^[42], 不过在这个例子中 RSGA 方法中我们只需要对 $|G\rangle$ 的性质有一些了解就可以, 另一方面从 RSGA 方法中我们还可以更好地理解为什么 $\hat{Q}^+$ 总由一些算符构成。

1.4 关联矩阵方法

本征态热化假说指出, 一般相互作用系统的一个高能本征态 $|\psi_n\rangle$ 在局域上看起来和热力学系综无异:

$$\langle \psi_n | \hat{O} | \psi_n \rangle \rightarrow \frac{1}{Z} \text{Tr} e^{-\beta \hat{H}} \hat{O}, \quad (76)$$

其中 $\hat{O}$ 是一个局域算符, $Z = \text{Tr} e^{-\beta \hat{H}}$ 是温度为 $T = 1/\beta$ ($k_B = 1$) 的正则系综的配分函数。对任意局域观测量 $\hat{O}$, (76) 式的左边只包含波函数的信息, 而右边由哈密顿量决定。换句话说, 高能本征态包括了系统哈密顿量的信息。的确考虑一个只包含局域相互作用的模型, 系统哈密顿量的参数正比于格点数, 而波函数的分量则随系统尺寸指数增加。更具体地, 如果我们有了本征波函数 $|\psi_n\rangle$, 那么本征方程 $\hat{H}|\psi_n\rangle = E_n|\psi_n\rangle$ 中哈密顿量参数的数目远小于方程的数目, 所以说本征态 $|\psi_n\rangle$ 包括哈密顿量 $\hat{H}$ 的信息看起来也很合理。事实上, 利用基于此想法我们的确可以从一般系统的本征态反推出系统的局域哈密顿量(允许得到的哈密顿量和原始的哈密顿量差一

个系数和无关紧要的常数项)^[87-89]。相比于一般的热化态,量子多体疤痕态总是低纠缠的,形式上比较简单,所以波函数中蕴含的信息可能不足以让我们反推出哈密顿量。这一点我们在上节 AKLT 的例子中看得非常清楚:疤痕态是一类无序 AKLT 模型(75)式的本征态。这暗示了量子多体疤痕态与热化本征态不同的一方面是疤痕态可以被一系列局域算符所湮灭^[90]。

一个系统地找出这些湮灭算符的方法是关联矩阵方法^[89]。对于任意一个量子态 $|\psi\rangle$ 和厄米算符 $\hat{O}$,我们可以把 $\hat{O}|\psi\rangle = \xi|\psi\rangle + |\psi_\perp\rangle$ 分解为平行部分和正交部分 $|\psi_\perp\rangle$,即 $\langle\psi_\perp|\psi\rangle = 0$ 。那么我们熟悉的的不等式便可以写成如下形式,

$$\langle\psi|\hat{O}^2|\psi\rangle - (\langle\psi|\hat{O}|\psi\rangle)^2 = \langle\psi_\perp|\psi_\perp\rangle \geq 0. \quad (77)$$

显然上式取等号当且仅当 $|\psi_\perp\rangle = 0$,亦即算符 $\hat{O}$ 是态 $|\psi\rangle$ 的本征算符: $\hat{O}|\psi\rangle = \xi|\psi\rangle$ 。为了构造出本征算符 $\hat{O}$ 的形式,我们考虑一组厄米算符基矢 $\{\hat{L}_i\}$ 在实数域上张成的线性厄米算符空间 $\mathcal{V}$,那么对于 $\mathcal{V}$ 中的任意算符 $\hat{O} = \sum_i w_i \hat{L}_i$,不等式(77)式可以写为如下二次型的形式

$$\sum_{ij} w_i \left(\langle\psi|\frac{1}{2}(\hat{L}_i \hat{L}_j + \hat{L}_j \hat{L}_i)|\psi\rangle - \langle\psi|\hat{L}_i|\psi\rangle \langle\psi|\hat{L}_j|\psi\rangle \right) w_j = \sum_{ij} w_i M_{ij} w_j \geq 0. \quad (78)$$

由此得知 M 是一个半正定的实对称矩阵,而且当且仅当向量 $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots)^T$ 是矩阵 M 的零向量, $\mathbf{w} \in \text{Ker}(M)$ 时上式取等号。这时 $\mathbf{w}$ 对应的算符 $\hat{O} = \sum_i w_i \hat{L}_i$ 是态 $|\psi\rangle$ 的本征算符。所以只要算符空间 $\mathcal{V}$ 足够大能包含态 $|\psi\rangle$ 的某个本征算符 $\hat{O}$,那么 $\hat{O}$ 对应的向量 $\mathbf{w}$ 必定是关联矩阵 M 的一个本征值为零的本征向量。所以算符空间 $\mathcal{V}$ 中 $|\psi\rangle$ 线性独立的本征算符 $\hat{O}$ 的数目就是关联矩阵 M 零点的数目 $N_0 \equiv \dim(\text{Ker}(M))$ 。下面我们将以无序 AKLT 模型(75)式为例来说明 N_0 的数目可以把其中的量子多体疤痕态和热化本征态区分出来。首先我们选取包含所有单格点算符和近邻相互作用的算符空间 $\mathcal{V}$ 。类似于自旋 1/2 系统的 Pauli 矩阵,自旋 $S=1$ 系统的 $\hat{L}_i$ 可以取为如下形式:

$$\hat{L}_i = (\lambda_a \otimes \lambda_b)_{n, n+1}. \quad (79)$$

其中下标 $(n, n+1)$ 代表 $\hat{L}_i$ 是作用于格点 n 和 $n+1$ 上的算符, $b=1, 2, \dots, 8$ 是八个标准 Gell-Mann 矩阵 λ_b 的指标^[70]。为了让 $\hat{L}_i$ 也能涵盖单体算符,我们选取 $a=0, 1, \dots, 8$ 并让 $\lambda_0 = \sqrt{\frac{2}{3}} \mathbb{I}$ 使得这九个矩阵满足如下归一性条件 $\text{Tr}(\lambda_a \lambda_b) = 2\delta_{ab}$ 。以上基矢 $\hat{L}_i$ 的选取能够让我们表示自旋 $S=1$ 系统所有的单体算符和近邻两体相互作用的线性组合。由于 $\hat{H} \in \mathcal{V}$,所以哈密顿量必定对应 $72L \times 72L$ 维关联矩阵 M 的一个零向量,所以对于所有本征态 $N_0 \geq 1$ 。如图 11 所示,绿色小点代表的所有热化本征态的关联矩阵的零点数目 $N_0=1$,这意味着我们可以从其本征态的信息来定出其哈密顿量的形式(可以和原始哈密顿量差一个系数)。其次,其中量子多体疤痕态对应的零点数目均满足 $N_0 > 1$,意味着除了哈密顿量 $\hat{H}$,疤痕态还存在其他的单体或者两体算符的线性组合的本征算符 $\hat{O}$,和我们的预期一致。不同于纠缠熵只能定量地用来区分量子多体疤痕态和热化本征态,并且容易受到精确对角化计算带来的有限尺寸效应的影响, N_0 是个整数,基本上不会受到有限尺寸效应的影响,提供了一个定性区分热化本征态和疤痕态的指标。值得注意的是,无序 AKLT 哈密顿量(75)式的疤痕态不仅包括了之前熟知的 SGA 疤痕态,还包括了像单磁振子态(single-magnon state)

$$|1_k\rangle = \sum_n e^{ikn} \left| \underbrace{1 \dots 1}_{n-1} 0 \underbrace{1 \dots 1}_{L-n} \right\rangle, \quad (80)$$

其中 k 是晶格动量, n 是格点指标, $\left| \underbrace{1 \dots 1}_{n-1} 0 \underbrace{1 \dots 1}_{L-n} \right\rangle$ 表示格点 n 上磁量子数 $m=0$ 而其他格点上 $m=1$ 的直积态^①。

除了提供了一个寻找量子多体疤痕态的定性指标,关联矩阵方法也能够帮我们对疤痕态空间进行调控。考虑哈密顿量 $\hat{H}$ 的两个本征态 $|\psi\rangle$ 和 $|\phi\rangle$,并把 $|\psi\rangle$ 和 $|\phi\rangle$ 本征算符张成的空间记为 $\mathcal{A}_{|\psi\rangle}$ 和 $\mathcal{A}_{|\phi\rangle}$,如果 $\mathcal{A}_{|\phi\rangle}$ 不是 $\mathcal{A}_{|\psi\rangle}$ 的子集,那么存在 $|\phi\rangle$ 的本征算符 $\hat{A}$ 使得 $\hat{A} \notin \mathcal{A}_{|\psi\rangle}$ 。这样我们便可以构造一个新的哈密顿量

$$\hat{H}' = \hat{H} + \hat{A}. \quad (81)$$

① SGA 疤痕态之外的其他疤痕态的具体形式和推导,感兴趣的读者可以参考文献[90]。

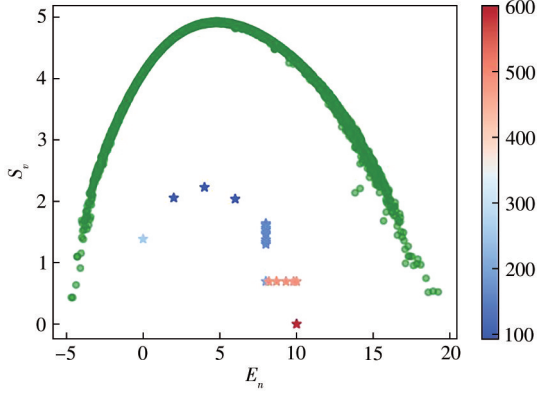


图 11 一维无序 AKLT 模型中本征态的二分冯诺依曼纠缠熵 S_e 随本征能量 E_n 变化的数据图

其中系统尺寸 $L=10$, 每个本征态用绿色小圈或者小星代表。显然小星对应的本征态为量子多体疤痕态: 其纠缠熵显著低于周围的本征态, 而绿色小圈对应的本征态为热化态。另一方面, 热化本征态对应的 N_0 均为 1, 而量子多体疤痕态的 N_0 显著大于 1 (其值的大小按照右侧的颜色条用不同颜色表示)。可见, 相较于纠缠熵定量的区别, 关联矩阵零点的数目提供了一个区别量子多体疤痕和热化本征态的定性指标。

Figure 11 A plot of the bipartite entanglement entropy of the eigenstates in the one-dimensional disordered AKLT model against eigenenergies E_n

The system size is $L=10$, and each eigenstate is represented by either a star or a green circle. The stars, corresponding to QMBs, have anomalously low entanglement entropy compared to the thermal eigenstates (circles). On the other hand, thermal eigenstates uniformly have $N_0=1$, while $N_0 \gg 1$ for QMBs (the value of N_0 is shown according to the color bar on the right). Therefore, compared with the quantitative difference of entanglement entropy, the correlation matrix zeros N_0 provides a qualitative indicator distinguishing QMBs from thermal eigenstates.

使得 $|\phi\rangle$ 依旧是新哈密顿量 $\hat{H}'$ 的本征态, 但一般情况下 $|\psi\rangle$ 不再是 $\hat{H}'$ 的本征态。通过对 SGA 疤痕态本征算符空间的分析, 我们会发现存在这样的算符 $\hat{A}$ 使得我们把中间的 $|\mathcal{S}_2\rangle, |\mathcal{S}_4\rangle, \dots, |\mathcal{S}_{L-4}\rangle$ 疤痕态从疤痕态空间中剔除出去, 如图 12 所示。

关联矩阵方法的另外一个优点在于其普适性: 很多量子多体疤痕态的严格数学框架可以纳入关联矩阵方法的框架。下面我们举几个之前介绍过的代数框架来说明关联矩阵的零点数目 N_0 可以用来探测其中的疤痕态。在 Shiraishi-Mori 框架中, 疤痕态 $|\psi\rangle \in \mathcal{S}$ 被一系列, 其数目记为 N_p , 线性独立的局域投影算符 $\{\hat{P}_i\}$ 所湮灭。所以只要我们取 $\{\hat{L}_i\}$ 张成

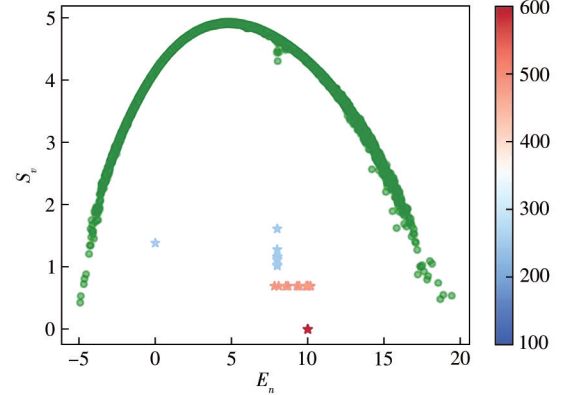


图 12 新哈密顿量 $\hat{H}'$ 本征态纠缠熵和关联矩阵零点数据图
新哈密顿量 $\hat{H}' = \hat{H} + \hat{A}$ (81) 式的本征态的二分冯诺依曼纠缠熵 S_e 和关联矩阵零点数目 N_0 与其本征能量 E_n 的数据图数据图, 其中 $\hat{A}$ 的具体形式可以参考 [90]。这里系统尺寸 $L=10$, 图中符号的意义和图 11 中的相同。

Figure 12 Data plot of eigenstate entanglement entropies and correlation matrix zeros of a new deformed Hamiltonian $\hat{H}'$

The data plot of bipartite von Neumann entanglement entropy and the number of correlation matrix zeros for the eigenstates of a new Hamiltonian, $\hat{H}' = \hat{H} + \hat{A}$ (81), against the eigenenergies E_n . The explicit form of $\hat{A}$ can be found in [90]. The system size is $L=10$, and the symbols have the same meaning as those in Fig. 11.

的算符空间 $\mathcal{V}$ 足够大能够包含这组投影算符 $\hat{P}_i \in \mathcal{V}$, 那么疤痕态关联矩阵的零点数目 N_0 必定满足 $N_0 \geq N_p$, 从而把疤痕态和热化态区分出来。同样 1.2 节介绍的基于对称性的三个量子多体疤痕态的框架中也都存在除了哈密顿量之外、新的能湮灭疤痕态的局域厄米算符 (之和)。此外, 受限谱生成代数框架中的量子多体疤痕态也能纳入关联矩阵的框架。从定理 4 和定理 5 的证明容易看出, RSGA 中的疤痕态空间 $\mathcal{S}$ 满足如下条件

$$([\hat{H}, \hat{\eta}^+] - \epsilon \hat{\eta}^+) \mathcal{S} \equiv \hat{A} \mathcal{S} = 0, \quad (82)$$

其中 $\hat{A} = [\hat{H}, \hat{\eta}^+] - \epsilon \hat{\eta}^+$ 不为零, 而且由于 $\hat{H}$ 和 $\hat{\eta}^+$ 是一些局域算符的和。虽然一般情况下, $\hat{A}$ 不是厄米算符, 不过这点可以通过简单推广关联矩阵的定义解决。为此我们选取 $\{\hat{L}_i\}$ 为更一般的厄米或非厄米局域算符, $\mathcal{V}$ 为 $\{\hat{L}_i\}$ 在复数域上张成的算符空间, 并如下定义关联矩阵

$$M_{ij} \equiv \langle \phi | \hat{L}_i^\dagger \hat{L}_j | \phi \rangle - \langle \phi | \hat{L}_i^\dagger | \phi \rangle \langle \phi | \hat{L}_j | \phi \rangle. \quad (83)$$

这时 M 是半正定的厄米矩阵, 其零能本征向量 $\mathbf{w} \in \text{Ker}(M)$ 对应的算符 $\hat{O} = \sum_i w_i \hat{L}_i$ 依旧是 $|\phi\rangle$ 的

本征算符, $\hat{O}|\psi\rangle = \xi|\psi\rangle$ 。所以算符 $\hat{A}$ 会给疤痕态的关联矩阵贡献一个零点, 能够把疤痕态和热化本征态区分出来。事实上, 如上面我们展示的无序 AKLT 模型的例子, 原始的实对称的关联矩阵的定义已足以用来刻画疤痕态。

2 总结和展望

量子多体疤痕态的发现打破了我们对本征态热化假说认知的框架, 之后的研究极大地丰富了我们对于相互作用体系高能本征态和量子多体非平衡态动力学的理解。本文只是对作者比较熟悉、数学上相对简单的几个典型的数学框架做了介绍。比如最近 S. Moudgalya 和 O. Motrunich 建立的能统一之前多个精确量子多体疤痕态框架的中心化子代数(commutant algebra)方法我们就没有介绍^[49]。尽管 SGA 框架尚不能纳入这个框架之中, 但 commutant algebra 方法对我们理解量子系统一般的对称性和守恒量很有启发意义^[91]。具体在疤痕态研究方面, 这个方法从构成哈密顿量局域集合 $\{\hat{H}_\alpha\}$ 组成的 $\dagger$ -代数(含单位元, 且在加法、乘法和厄米共轭下封闭的结合代数)出发, 通过研究该代数的中心化子(centralizer/commutant), 再利用冯·诺依曼双交换定理(von Neumann double commutant theorem)和与之而来的希尔伯特空间的不可约表示, 指出精确量子多体疤痕态存在多个非对易的局域本征算符^[49], 与我们关联矩阵方法的结论一致。尽管如此, 目前所有框架还不能对和实验密切相关的 PXP 模型中的疤痕态给出严格结果。而且如图 4 展示的那样, PXP 模型中不止最外面的那圈被称为量子多体疤痕态的本征态违背了 ETH, 最外圈和主体部分的一个个塔状结构中的态都违背了 ETH, 但也缺乏理解。此外现有发现疤痕态的方法, 数值上需要做了对角化计算才知道, 解析上往往需要做很多复杂的代数分析, 总体上还是缺乏简单的物理图像。所以怎么突破代数分析和数值对角化, 建立一些理解量子多体疤痕态的物理图像将是非常有意义的探索^[54-56, 59-60, 92-95]。再有一点是实验上观察到量子多体疤痕现象在特定的周期驱动下可以变得更加稳定^[60, 62, 96], 有违周期驱动总是加热系统这一普遍现象, 是非常值得研究的问题。尽管本文中介绍的几个框架中的精确量子多体疤痕态都是低纠缠的(sub-volume entangled), 但最近研究者受 thermalfield double state 的启发, 构造出了高纠缠的(volume en-

tangled)彩虹疤痕态(rainbow scars)^[97]。这个有趣的名字源于其疤痕态纠缠结构的图形表示, 而且彩虹疤痕态还能在里德堡原子链中实现。除了以量子多体疤痕态为代表的弱违背 ETH 的现象, 后续研究又在动力学受限系统、甚至二维量子伊辛模型的有效哈密顿量中陆续发现了更为丰富的违背 ETH 的希尔伯特空间碎片化(Hilbert space fragmentation, HSF)现象^[64, 98-110]。在 HSF 中, 通常由于粒子运动时受到比如偶极矩守恒之类的限制, 哈密顿量重复作用在一些简单的直积态上面得到的态只能张开总希尔伯特空间的一部分。这导致希尔伯特空间解耦成一系列被称为 Krylov sectors 的直和, 从而提供了一种违背 ETH 的新途径。而且某些 Krylov sector 也会存在量子疤痕态的现象。综上, 量子多体系统的热化动力学蕴含着极为丰富的现象, 不过动力学演化既依赖于哈密顿量、也依赖于指数多的初态波函数的分量。我们不能指望用这么多的参数去理解事物, 探索并建立有一些有新物理、具有一定普适性的范式将是这方面研究的一个重要发展方向。

致谢

首先感谢清华大学高等研究院的翟荟教授、复旦大学的张鹏飞青年研究员、南开大学的潘磊副教授和加州理工大学的刘尚博士后在量子多体疤痕态、关联矩阵等方面的研究合作。我也要感谢我的学生李钰, 他认真阅读了初稿, 并给出了很多有意义的反馈。

参考文献:

- [1] POINCARÉ H. Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique[J]. *Acta Mathematica*, 1890, 13(1-2): 1-270.
- [2] BARROW-GREEN J. Poincaré and the Three Body Problem; 11 [M]. Providence, RI: American Mathematical Society, 1997.
- [3] GUTZWILLER M C. Moon-Earth-Sun; The oldest three-body problem [J]. *Reviews of Modern Physics*, 1998, 70(2): 589-639. DOI: 10.1103/RevModPhys.70.589.
- [4] FEYNMAN R P. The Character of Physical Law [M]. Cambridge, MA: The MIT Press, 2017.
- [5] ANDERSON P W. More Is Different. Broken symmetry and the nature of the hierarchical structure of science. [J]. *Science*, 1972, 177(4047): 393-396. DOI: 10.1126/science.177.4047.393.
- [6] BERRY M. Singular Limits [J]. *Physics Today*, 2002, 55(5): 10-11. DOI: 10.1063/1.1485555.

- [7] MA S K. Modern Theory of Critical Phenomena[M]. New York: Routledge, 2018. DOI:10.4324/9780429498886.
- [8] CARDY J L. Scaling and Renormalization in Statistical Physics[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1996. DOI:10.1017/cbo9781316036440.
- [9] WILSON K G. Problems in Physics with many Scales of Length[J]. *Scientific American*, 1979, 241(2): 158-179. DOI:10.1038/scientificamerican0879-158.
- [10] GIBBS J W. Elementary Principles in Statistical Mechanics[M]. Mineola, NY: Dover, 2014.
- [11] MA S K. Statistical Mechanics[M]. Singapore: World Scientific, 1985.
- [12] LANDAU L D, LIFSHITZ E M. Statistical Physics, Part 1, 3rd Ed.[M]. Oxford: Pergamon Press, 1980.
- [13] D'ALESSIO L, KAFRI Y, POLKOVNIKOV A, *et al.* From quantum chaos and eigenstate thermalization to statistical mechanics and thermodynamics[J]. *Advances in Physics*, 2016, 65(3): 239-362. DOI: 10.1080/00018732.2016.1198134.
- [14] BIRKHOFF G D. Proof of the Ergodic Theorem[J]. *Proc Natl Acad Sci USA*, 1931, 17(12): 656-660. DOI:10.1073/pnas.17.2.656.
- [15] VON NEUMANN J. Proof of the Quasi-Ergodic Hypothesis[J]. *Proc Natl Acad Sci USA*, 1932, 18(1): 70-82. DOI:10.1073/pnas.18.1.70.
- [16] KRYLOV N S. Works on the Foundations of Statistical Physics[M]. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1979.
- [17] DEUTSCH J M. Quantum statistical mechanics in a closed system[J]. *Physical Review A: Atomic, Molecular, and PhysicsOptical*, 1991, 43(4): 2046-2049. DOI:10.1103/PhysRevA.43.2046.
- [18] SREDNICKI M. Chaos and quantum thermalization [J]. *Physical Review E: PhysicsStatistical, Plasmas, Fluids, and Related Interdisciplinary Topics*, 1994, 50(2): 888-901. DOI:10.1103/PhysRevE.50.888.
- [19] SREDNICKI M. The approach to thermal equilibrium in quantized chaotic systems[J]. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 1999, 32(7): 1163-1175. DOI:10.1088/0305-4470/32/7/007.
- [20] RIGOL M, DUNJKO V, OLSHANII M. Thermalization and its mechanism for generic isolated quantum systems [J]. *Nature*, 2008, 452(7189): 854-858. DOI:10.1038/nature06838.
- [21] DEUTSCH J M. Eigenstate thermalization hypothesis [J]. *Reports On Progress in Physics*, 2018, 81(8): 082001. DOI:10.1088/1361-6633/aac9f1.
- [22] BAXTER R J. Exactly Solved Models in Statistical Mechanics[M]. Mineola, NY: Dover Publications, 2007.
- [23] SUTHERLAND B. Beautiful Models: 70 Years of Exactly Solved Quantum Many-Body Problems[M]. Singapore: World Scientific, 2004. DOI:10.1142/5552.
- [24] FRANCHINI F. An Introduction to Integrable Techniques for One-Dimensional Quantum Systems[M]. Cham: Springer, 2017. DOI: 10.1007/978-3-319-48487-7.
- [25] GORNYI I V, MIRLIN A D, POLYAKOV D G. Interacting Electrons in Disordered Wires: Anderson Localization and Low-T Transport[J]. *Physical Review Letters*, 2005, 95(20): 206603. DOI:10.1103/PhysRevLett.95.206603.
- [26] BASKO D M, ALEINER I L, ALTSHULER B L. Metal-insulator transition in a weakly interacting many-electron system with localized single-particle states[J]. *Annales de Physique*, 2006, 321(5): 1126-1205. DOI: 10.1016/j.aop.2005.11.014.
- [27] NANDKISHORE R, HUSE D A. Many-Body Localization and Thermalization in Quantum Statistical Mechanics[J]. *Annual Review of Condensed Matter Physics*, 2015, 6(1): 15-38. DOI: 10.1146/annurev-conmatphys-031214-014726.
- [28] ABANIN D A, ALTMAN E, BLOCH I, *et al.* Colloquium: Many-body localization, thermalization, and entanglement[J]. *Reviews of Modern Physics*, 2019, 91(2): 021001. DOI:10.1103/RevModPhys.91.021001.
- [29] KIM H, IKEDA T N, HUSE D A. Testing whether all eigenstates obey the eigenstate thermalization hypothesis[J]. *Physical Review E: PhysicsStatistical, Plasmas, Fluids, and Related Interdisciplinary Topics*, 2014, 90(5): 052105. DOI: 10.1103/PhysRevE.90.052105.
- [30] LIFSHITZ I M, GREDESKUL S A, PASTUR L A. Introduction to the Theory of Disordered Systems [M]. New York: Wiley, 1988.
- [31] BERNIEN H, SCHWARTZ S, KEESLING A, *et al.* Probing many-body dynamics on a 51-atom quantum simulator[J]. *Nature*, 2017, 551(7682): 579-584. DOI:10.1038/nature24622.
- [32] TURNER C J, MICHAILIDIS A A, ABANIN D A, *et al.* Weak ergodicity breaking from quantum many-body scars [J]. *Nature Physics*, 2018, 14(7): 745-749. DOI:10.1038/s41567-018-0137-5.
- [33] TURNER C J, MICHAILIDIS A A, ABANIN D A, *et al.* Quantum scarred eigenstates in a Rydberg atom chain: Entanglement, breakdown of thermalization, and stability to perturbations [J]. *Physical Review B*,

- 2018, 98(15): 155134. DOI:10.1103/PhysRevB.98.155134.
- [34] HELLER E J. Bound-State Eigenfunctions of Classically Chaotic Hamiltonian Systems: Scars of Periodic Orbits [J]. *Physical Review Letters*, 1984, 53(16): 1515-1518. DOI:10.1103/PhysRevLett.53.1515.
- [35] HELLER E J, TOMSOVIC S. Postmodern Quantum Mechanics [J]. *Physics Today*, 1993, 46(7): 38-46. DOI:10.1063/1.881358.
- [36] MOUDGALYA S, RACHEL S, BERNEVIG B A, *et al.* Exact excited states of nonintegrable models [J]. *Physical Review B*, 2018, 98(23): 235155. DOI:10.1103/PhysRevB.98.235155.
- [37] MOUDGALYA S, REGNAULT N, BERNEVIG B A. η -pairing in Hubbard models: From spectrum generating algebras to quantum many-body scars [J]. *Physical Review B*, 2020, 102(8): 085140. DOI:10.1103/PhysRevB.102.085140.
- [38] MARK D K, MOTRUNICH O I. η -pairing states as true scars in an extended Hubbard model [J]. *Physical Review B*, 2020, 102(7): 075132. DOI:10.1103/PhysRevB.102.075132.
- [39] SCHECTER M, IADECOLA T. Weak Ergodicity Breaking and Quantum Many-Body Scars in Spin-1 XY Magnets [J]. *Physical Review Letters*, 2019, 123(14): 147201. DOI:10.1103/PhysRevLett.123.147201.
- [40] IADECOLA T, SCHECTER M. Quantum many-body scar states with emergent kinetic constraints and finite-entanglement revivals [J]. *Physical Review B*, 2020, 101(2): 024306. DOI:10.1103/PhysRevB.101.024306.
- [41] SHIRAISHI N, MORI T. Systematic Construction of Counterexamples to the Eigenstate Thermalization Hypothesis [J]. *Physical Review Letters*, 2017, 119(3): 030601. DOI:10.1103/PhysRevLett.119.030601.
- [42] MARK D K, LIN C J, MOTRUNICH O I. Unified structure for exact towers of scar states in the Affleck-Kennedy-Lieb-Tasaki and other models [J]. *Physical Review B*, 2020, 101(19): 195131. DOI:10.1103/PhysRevB.101.195131.
- [43] PAKROUSKI K, PALLEGAR P N, POPOV F K, *et al.* Many-Body Scars as a Group Invariant Sector of Hilbert Space [J]. *Physical Review Letters*, 2020, 125(23): 230602. DOI:10.1103/PhysRevLett.125.230602.
- [44] PAKROUSKI K, PALLEGAR P N, POPOV F K, *et al.* Group theoretic approach to many-body scar states in fermionic lattice models [J]. 2021, 3(4): 043156. DOI:10.1103/PhysRevResearch.3.043156.
- [45] SUN Z, POPOV F K, KLEBANOV I R, *et al.* Majorana scars as group singlets [J]. 2023, 5(4): 043208. DOI:10.1103/PhysRevResearch.5.043208.
- [46] REN J, LIANG C, FANG C. Quasisymmetry Groups and Many-Body Scar Dynamics [J]. *Physical Review Letters*, 2021, 126(12): 120604. DOI:10.1103/PhysRevLett.126.120604.
- [47] REN J, LIANG C, FANG C. Deformed symmetry structures and quantum many-body scar subspaces [J]. *Physical Review Research*, 2022, 4(1): 013155. DOI:10.1103/PhysRevResearch.4.013155.
- [48] O'DEA N, BURNELL F, CHANDRAN A, *et al.* From tunnels to towers: Quantum scars from Lie algebras and q -deformed Lie algebras [J]. *Physical Review Research*, 2020, 2(4): 043305. DOI:10.1103/PhysRevResearch.2.043305.
- [49] MOUDGALYA S, MOTRUNICH O I. Exhaustive Characterization of Quantum Many-Body Scars using Commutant Algebras [Z]. arXiv:2209.03377.
- [50] LIN C J, MOTRUNICH O I. Exact Quantum Many-Body Scar States in the Rydberg-Blockaded Atom Chain [J]. *Physical Review Letters*, 2019, 122(17): 173401. DOI:10.1103/PhysRevLett.122.173401.
- [51] IVANOV A N, MOTRUNICH O I. Volume-entangled exact eigenstates in the PXP and related models in any dimension [Z]. arXiv:2403.05515.
- [52] HO W W, CHOI S, PICHLER H, *et al.* Periodic Orbits, Entanglement, and Quantum Many-Body Scars in Constrained Models: Matrix Product State Approach [J]. *Physical Review Letters*, 2019, 122(4): 040603. DOI:10.1103/PhysRevLett.122.040603.
- [53] CHOI S, TURNER C J, PICHLER H, *et al.* Emergent SU(2) Dynamics and Perfect Quantum Many-Body Scars [J]. *Physical Review Letters*, 2019, 122(22): 220603. DOI:10.1103/PhysRevLett.122.220603.
- [54] KHEMANI V, LAUMANN C R, CHANDRAN A. Signatures of integrability in the dynamics of Rydberg-blockaded chains [J]. *Physical Review B*, 2019, 99(16): 161101. DOI:10.1103/PhysRevB.99.161101.
- [55] TURNER C J, DESAULES J Y, BULL K, *et al.* Correspondence Principle for Many-Body Scars in Ultracold Rydberg Atoms [J]. *Physical Review X*, 2021, 11(2): 021021. DOI:10.1103/PhysRevX.11.021021.
- [56] SURACE F M, MAZZA P P, GIUDICI G, *et al.* Lattice Gauge Theories and String Dynamics in Rydberg Atom Quantum Simulators [J]. *Physical Review X*, 2020, 10(2): 021041. DOI:10.1103/PhysRevX.10.021041.

- 10.021041.
- [57] YAO Z, PAN L, LIU S, *et al.* Quantum many-body scars and quantum criticality[J]. *Physical Review B*, 2022, 105(12): 125123. DOI: 10.1103/PhysRevB.105.125123.
- [58] IADECOLA T, SCHECTER M, XU S. Quantum many-body scars from magnon condensation[J]. *Physical Review B*, 2019, 100(18): 184312. DOI: 10.1103/PhysRevB.100.184312.
- [59] PAN L, ZHAI H. Composite spin approach to the blockade effect in Rydberg atom arrays[J]. *Physical Review Research*, 2022, 4(3): L032037. DOI: 10.1103/PhysRevResearch.4.L032037.
- [60] ZHANG P, DONG H, GAO Y, *et al.* Many-body Hilbert space scarring on a superconducting processor[J]. *Nature Physics*, 2022. DOI: 10.1038/s41567-022-01784-9.
- [61] YAO Y, XIANG L, GUO Z, *et al.* Observation of many-body Fock space dynamics in two dimensions[J]. *Nature Physics*, 2023. DOI: 10.1038/s41567-023-02133-0.
- [62] SU G X, SUN H, HUDOMAL A, *et al.* Observation of many-body scarring in a Bose-Hubbard quantum simulator[J]. 2023, 5(2): 023010. DOI: 10.1103/PhysRevResearch.5.023010.
- [63] SERBYN M, ABANIN D A, PAPIĆ Z. Quantum many-body scars and weak breaking of ergodicity[J]. *Nature Physics*, 2021, 17(6): 675-685. DOI: 10.1038/s41567-021-01230-2.
- [64] MOUDGALYA S, BERNEVIG B A, REGNAULT N. Quantum many-body scars and Hilbert space fragmentation: a review of exact results[J]. *Reports On Progress in Physics*, 2022, 85(8): 086501. DOI: 10.1088/1361-6633/ac73a0.
- [65] PAPIĆ Z. Weak Ergodicity Breaking Through the Lens of Quantum Entanglement[M]//BAYAT A, BOSE S, JOHANNESSON H. Entanglement in Spin Chains: From Theory to Quantum Technology Applications. Cham: Springer, 2022: 341-395. DOI: 10.1007/978-3-031-03998-0_13.
- [66] CHANDRAN A, IADECOLA T, KHEMANI V, *et al.* Quantum Many-Body Scars: A Quasiparticle Perspective[J]. *Annual Review of Condensed Matter Physics*, 2023, 14(1): 443-469. DOI: 10.1146/annurev-conmatphys-031620-101617.
- [67] 潘磊. 超冷原子中的量子多体疤痕现象[J]. 新兴科学与技术趋势, 2023, 2(2): 147-177. DOI: 10.12405/j.issn.2097-1486.2023.02.004.
- [68] ANDERSON P W. Basic Notions of Condensed Matter Physics: 55[M]. Menlo Park, CA: Benjamin/Cummings Pub. Co., 1984.
- [69] CHAIKIN P M, LUBENSKY T C. Principles of Condensed Matter Physics[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1995. DOI: 10.1017/CBO9780511813467.
- [70] ZEE A. Group Theory in a Nutshell for Physicists[M]. Princeton: Princeton University Press, 2016.
- [71] KLEBANOV I R, TARNOPOLSKY G. Uncolored random tensors, melon diagrams, and the Sachdev-Ye-Kitaev models[J]. *Physical Review D: Particles and Fields*, 2017, 95(4): 046004. DOI: 10.1103/PhysRevD.95.046004.
- [72] KLEBANOV I R, MILEKHIN A, POPOV F, *et al.* Spectra of eigenstates in fermionic tensor quantum mechanics[J]. *Physical Review D: Particles and Fields*, 2018, 97(10): 106023. DOI: 10.1103/PhysRevD.97.106023.
- [73] CHATTOPADHYAY S, PICHLER H, LUKIN M D, *et al.* Quantum many-body scars from virtual entangled pairs[J]. *Physical Review B*, 2020, 101(17): 174308. DOI: 10.1103/PhysRevB.101.174308.
- [74] SHIBATA N, YOSHIOKA N, KATSURA H. Onsager's Scars in Disordered Spin Chains[J]. *Physical Review Letters*, 2020, 124(18): 180604. DOI: 10.1103/PhysRevLett.124.180604.
- [75] YANG C N. η pairing and off-diagonal long-range order in a Hubbard model[J]. *Physical Review Letters*, 1989, 63(19): 2144-2147. DOI: 10.1103/PhysRevLett.63.2144.
- [76] YANG C N, ZHANG S C. SO_4 symmetry in a Hubbard model[J]. *Modern Physics Letters B*, 1990, 04(11): 759-766. DOI: 10.1142/S0217984990000933.
- [77] ESSLER F H L, FRAHM H, GÖHMANN F, *et al.* The One-Dimensional Hubbard Model[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2005. DOI: 10.1017/CBO9780511534843.
- [78] AROVAS D P, BERG E, KIVELSON S A, *et al.* The Hubbard Model[J]. *Annual Review of Condensed Matter Physics*, 2022, 13(1): 239-274. DOI: 10.1146/annurev-conmatphys-031620-102024.
- [79] YANG C N. Remarks and generalizations about $SU_2 \times SU_2$ symmetry of Hubbard models[J]. *Physics Letters A*, 1991, 161(3): 292-294. DOI: 10.1016/0375-9601(91)90020-9.
- [80] AFFLECK I. Field Theory Methods and Strongly Correlated Electrons[M]//LEE H C. Physics, Geom-

- etry and Topology. Boston, MA: Springer, 1990: 1-13. DOI:10.1007/978-1-4615-3802-8_1.
- [81] ZHAI H. Two generalizations of η -pairing in extended Hubbard models [J]. *Physical Review B*, 2005, 71(1): 012512. DOI:10.1103/PhysRevB.71.012512.
- [82] LI K. η -pairing in correlated fermion models with spin-orbit coupling [J]. *Physical Review B*, 2020, 102(16): 165150. DOI:10.1103/PhysRevB.102.165150.
- [83] VAFEK O, REGNAULT N, BERNEVIG B A. Entanglement of exact excited eigenstates of the Hubbard model in arbitrary dimension [J]. *SciPost Physics*, 2017, 3(6): 043-21. DOI:10.21468/SciPostPhys.3.6.043.
- [84] AFFLECK I, KENNEDY T, LIEB E H, *et al.* Rigorous results on valence-bond ground states in antiferromagnets [J]. *Physical Review Letters*, 1987, 59(7): 799-802. DOI:10.1103/PhysRevLett.59.799.
- [85] GIRVIN S M, YANG K. Modern Condensed Matter Physics [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2019. DOI:10.1017/9781316480649.
- [86] MOUDGALYA S, REGNAULT N, BERNEVIG B A. Entanglement of exact excited states of Affleck-Kennedy-Lieb-Tasaki models: Exact results, many-body scars, and violation of the strong eigenstate thermalization hypothesis [J]. *Physical Review B*, 2018, 98(23): 235156. DOI:10.1103/PhysRevB.98.235156.
- [87] GARRISON J R, GROVER T. Does a Single Eigenstate Encode the Full Hamiltonian? [J]. *Physical Review X*, 2018, 8(2): 021026. DOI:10.1103/PhysRevX.8.021026.
- [88] CHERTKOV E, CLARK B K. Computational Inverse Method for Constructing Spaces of Quantum Models from Wave Functions [J]. *Physical Review X*, 2018, 8(3): 031029. DOI:10.1103/PhysRevX.8.031029.
- [89] QI X L, RANARD D. Determining a local Hamiltonian from a single eigenstate [J]. *Quantum*, 2019, 3: 159. DOI:10.22331/q-2019-07-08-159.
- [90] YAO Z, ZHANG P. Quantum Many-body Scars through the Lens of Correlation Matrix [Z]. arXiv:2410.21812.
- [91] MOUDGALYA S, MOTRUNICH O I. From symmetries to commutant algebras in standard Hamiltonians [J]. *Annales de Physique*, 2023, 455: 169384. DOI:10.1016/j.aop.2023.169384.
- [92] WANG H Y, ZHANG W Y, YAO Z, *et al.* Interrelated Thermalization and Quantum Criticality in a Lattice Gauge Simulator [J]. *Physical Review Letters*, 2023, 131(5): 050401. DOI:10.1103/PhysRevLett.131.050401.
- [93] GUO Z, LIU B, GAO Y, *et al.* Origin of Hilbert-space quantum scars in unconstrained models [J]. *Physical Review B*, 2023, 108(7): 075124. DOI:10.1103/PhysRevB.108.075124.
- [94] HALIMEH J C, BARBIERO L, HAUKE P, *et al.* Robust quantum many-body scars in lattice gauge theories [J]. *Quantum*, 2023, 7: 1004. DOI:10.22331/q-2023-05-15-1004.
- [95] CHENG Y, ZHAI H. Emergent U(1) lattice gauge theory in Rydberg atom arrays [J]. *Nat Rev Phys*, 2024, 6(9): 566-576. DOI:10.1038/s42254-024-00749-6.
- [96] BLUVSTEIN D, OMRAN A, LEVINE H, *et al.* Controlling quantum many-body dynamics in driven Rydberg atom arrays [J]. *Science*, 2021, 371(6536): 1355-1359. DOI:10.1126/science.abg2530.
- [97] LANGLETT C M, YANG Z C, WILDEBOER J, *et al.* Rainbow scars: From area to volume law [J]. *Physical Review B*, 2022, 105(6): L060301. DOI:10.1103/PhysRevB.105.L060301.
- [98] SALA P, RAKOVSKY T, VERRESEN R, *et al.* Ergodicity Breaking Arising from Hilbert Space Fragmentation in Dipole-Conserving Hamiltonians [J]. *Physical Review X*, 2020, 10(1): 011047. DOI:10.1103/PhysRevX.10.011047.
- [99] YANG Z C, LIU F, GORSHKOV A V, *et al.* Hilbert-Space Fragmentation from Strict Confinement [J]. *Physical Review Letters*, 2020, 124(20): 207602. DOI:10.1103/PhysRevLett.124.207602.
- [100] LANGLETT C M, XU S. Hilbert space fragmentation and exact scars of generalized Fredkin spin chains [J]. *Physical Review B*, 2021, 103(22): L220304. DOI:10.1103/PhysRevB.103.L220304.
- [101] KHEMANI V, HERMELE M, NANDKISHORE R. Localization from Hilbert space shattering: From theory to physical realizations [J]. *Physical Review B*, 2020, 101(17): 174204. DOI:10.1103/PhysRevB.101.174204.
- [102] MOUDGALYA S, PREM A, NANDKISHORE R, *et al.* Thermalization and Its Absence within Krylov Subspaces of a Constrained Hamiltonian [M]//LIAN B, LIU C X, DEMLER E, *et al.* Memorial Volume for Shoucheng Zhang. Singapore: World Scientific, 2021: 147-209. DOI:10.1142/9789811231711_0009.
- [103] YOSHINAGA A, HAKOSHIMA H, IMOTO T, *et al.* Emergence of Hilbert Space Fragmentation in Ising Models with a Weak Transverse Field [J]. *Physical Review Letters*, 2022, 129(9): 090602. DOI:10.1103/PhysRevLett.129.090602.

- [104] HART O, NANDKISHORE R. Hilbert space shattering and dynamical freezing in the quantum Ising model [J]. *Physical Review B*, 2022, 106 (21): 214426. DOI:10.1103/PhysRevB.106.214426.
- [105] MOUDGALYA S, MOTRUNICH O I. Hilbert Space Fragmentation and Commutant Algebras [J]. *Physical Review X*, 2022, 12(1): 011050. DOI:10.1103/PhysRevX.12.011050.
- [106] BUČA B. Unified Theory of Local Quantum Many-Body Dynamics: Eigenoperator Thermalization Theorems[J]. *Physical Review X*, 2023, 13(3): 031013. DOI:10.1103/PhysRevX.13.031013.
- [107] KOHLERT T, SCHERG S, SALA P, *et al.* Exploring the Regime of Fragmentation in Strongly Tilted Fermi-Hubbard Chains [J]. *Physical Review Letters*, 2023, 130(1): 010201. DOI:10.1103/PhysRevLett.130.010201.
- [108] WANG Y Y, SHI Y H, SUN Z H, *et al.* Exploring Hilbert-Space Fragmentation on a Superconducting Processor[Z]. arXiv:2403.09095.
- [109] KLOCKE K, MOORE J E, BUCHHOLD M. Power-Law Entanglement and Hilbert Space Fragmentation in Nonreciprocal Quantum Circuits[J]. *Physical Review Letters*, 2024, 133(7): 070401. DOI:10.1103/PhysRevLett.133.070401.
- [110] ŁYDŹBA P, PRELOVŠEK P, MIERZEJEWSKI M. Local Integrals of Motion in Dipole-Conserving Models with Hilbert Space Fragmentation[J]. *Physical Review Letters*, 2024, 132(22): 220405. DOI:10.1103/PhysRevLett.132.220405.



么志远,男,理学博士,兰州大学物理科学与技术学院青年研究员。2011年本科毕业于中国科学技术大学,2018年于美国马萨诸塞大学安默斯特分校(UMass, Amherst)获得物理学博士学位,2018年到2022年在清华大学高等研究院从事博士后研究工作,之后入职兰州大学物理科学与技术学院,任青年研究员、硕士生导师。研究兴趣主要集中在量子相变、量子蒙特卡罗方法、量子热化和格点规范理论中非平衡态动力学等方面的研究。

(责任编辑:陈 立)